Università degli Studi di Trieste
Dipartimento di Fisica Teorica

Laboratorio di Climatologia
LC

Franco Stravisi

DISPENSE DEL CORSO DI "OCEANOGRAFIA"

Rapporto Interno
LC 86/2
(FTC 86/2)

Trieste 1986

INTRODUZIONE

Le dispense qui pubblicate raccolgono la parte fondamentale del corso di "Oceanografia" per Scienze Naturali dell'Università degli Studi di Trieste, tenuto per incarico dal sottoscritto dall'A.A. 1976-1977 al 1985-1986.

Con l'A.A. 1986-1987 il corso di "Oceanografia" è stato sostituito dal corso di "Fisica Terrestre e Climatologia", che include nel programma delle lezioni gli argomenti precedentemente trattati.

Le dispense, preparate nel 1977, sono ancora valide. Gli aggiornamenti riguardano l'uso delle unità di misura del sistema internazionale (SI), la definizione della *scala di salinità pratica PSS-1978*, e l'introduzione dell' *equazione di stato internazionale per l'acqua di mare IESS-80* (cap. II). I riferimenti sono:

UNESCO (1981): *Background papers and supporting data on the Practical Salinity Scale 1978*, TP 37, 144 pag.

UNESCO (1981): *Background papers and supporting data on the International Equation of State of Seawater 1980*, TP 38, 192 pag.

UNESCO (1985): *The international system of units (SI) in oceanography*, TP 45 (IAPSO SP 32), 124 pag.

Franco Stravisi

U N I V E R S I T A' D E G L I S T U D I D I T R I E S T E

Franco Stravisi

" O C E A N O G R A F I A "

1 9 7 7

O C E A N O G R A F I A

I. DESCRIZIONE GEOGRAFICA DEGLI OCEANI

1. Introduzione. pag. 1
2. Distribuzione degli oceani e delle terre emerse. 1
3. Curva ipsografica. 1

II. DESCRIZIONE CHIMICO-FISICA DEGLI OCEANI

1. Composizione chimica dell'acqua di mare. 4
2. La salinità. 5
3. Gas disciolti nell'acqua di mare. 6
4. Ossigeno. 8
5. Sistema dei carbonati e pH. 9
6. Temperatura. 10
7. Pressione. 11
8. Densità ed equazione di stato. 12
9. Tipi di acqua e diagrammi T-S. 14
10. Propagazione del suono. 17
11. Propagazione della luce. 20

III. IDRODINAMICA

1. Introduzione. 23
2. Campi scalari e vettoriali. 23
3. Variabili euleriane ed equazioni del moto. 24
4. Variabili lagrangiane e derivata totale. 25
5. Equazione di continuità ed equazione del momento. 26
6. Il campo di forza. 27
7. Le equazioni dell'idrodinamica. 31

IV. CORRENTI

1. Introduzione. 33
2. Corrente geostrofica. 34
3. Corrente inerziale. 35
4. Corrente di gradiente. 36
5. Corrente ciclostrofica. 37
6. Decadimento della corrente per effetto dell'attrito. 38
7. Correnti di deriva. 38

V. STORM SURGE E SESSE

1. Le equazioni di storm surge. 41
2. Sesse. 44
3. Effetti del vento in un bacino. 46
4. Esempi. 48

VI. LA MAREA ASTRONOMICA

1. La forza di marea. 50
2. La teoria armonica. 54
3. Le previsioni di marea. 55
4. Le maree nell'Adriatico. 56

VII. ONDE

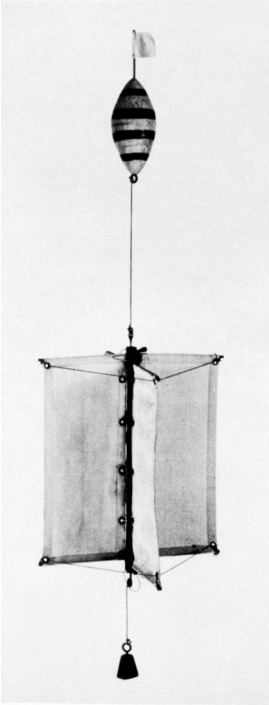
1. Classificazione delle onde. 59
2. Onde progressive. 60
3. Onde gravitazionali di Airy. 61
4. Onde di superficie. 62
5. Onde lunghe. 64

VIII. STRUMENTI E MISURE

1. Introduzione. 66
2. Misura della profondità. 66
3. Prelievo di campioni d'acqua. 68
4. Termometri a rovesciamento. 69
5. Determinazione della salinità. 71
6. Misure di corrente. 71

IX. ELABORAZIONE DEI DATI

1. Introduzione. 75
2. Tavole di frequenza ed istogrammi. 75
3. Distribuzione normale. 77
4. Fenomeni stocastici e deterministici. 78
5. Analisi di Fourier. 79
6. Filtri numerici. 80
7. Analisi periodale. 86



Drague à courant.

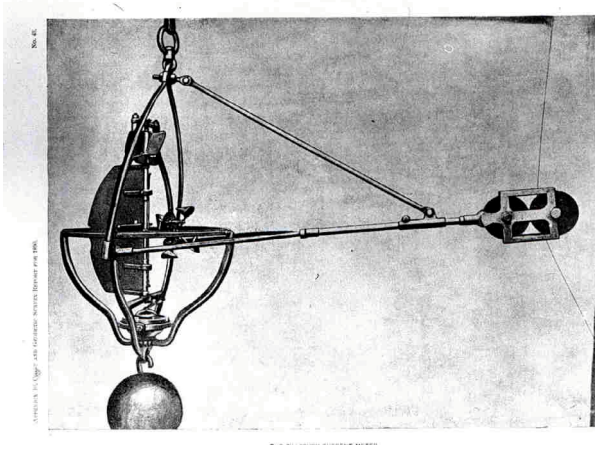


Figure 27. – Modèle du mesureur de courant d'EKMAN.
(photo Y. Berard)

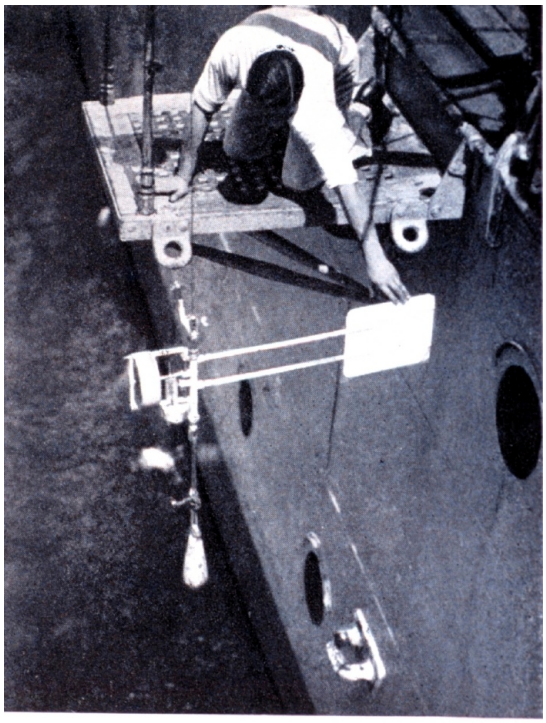


Abb. 334. Der Merz-Ekmansche Stromnesser für Einzelmessungen.

I . DESCRIZIONE GEOGRAFICA DEGLI OCEANI

1. Introduzione. L'oceano, inteso come l'insieme degli oceani e dei mari distribuiti con continuità sulla superficie terrestre, costituisce la parte preminente dell'idrosfera; la quale forma, assieme alla litosfera, all'atmosfera e alla biosfera una partizione del nostro pianeta, introdotta per comodità di classificazione e studio. Questa suddivisione può essere utile per inquadrare mentalmente un processo di equilibrio dinamico, con interazioni e scambi continui di materia e di energia tra le diverse parti (fig.1) della terra, e tra la terra stessa ed il resto dell'universo.

2. Distribuzione degli oceani e delle terre emerse. L'oceano occupa circa i 7/10 della superficie terrestre: i rimanenti 3/10 sono occupati da terre emerse. La distribuzione percentuale relativa di terra e mare in funzione della latitudine, o distribuzione zonale, è schematizzata nella fig. 2, ricavata da un classico lavoro di Kossinna (1921). Il grafico è in pratica un istogramma (cfr. par. IX.2), dove le classi sono zone (superfici tra due paralleli) ampie 5° in latitudine, e le frequenze sono le rispettive percentuali in superficie delle terre emerse. In particolare si nota che la calotta boreale è occupata dal mare (Mar Glaciale Artico) e che la calotta australe è occupata da terra (continente Antartico). Le terre emerse prevalgono nella zona temperata settentrionale; attorno ai 60° di latitudine sud vi è una fascia ininterrotta di mare che circonda il pianeta.

3. Curva ipsografica. Dal citato lavoro di Kossinna, i cui dati sono ripresi in alcuni dei lavori citati nella bibliografia, è tratto l'istogramma della fig. 3, ove è riportata la percentuale di superficie del pianeta con altezza sul livello medio del mare compresa tra -7000 e -6000 m, .. e tra 5000 e 6000 m (classi di ampiezza 1000 m). La distribuzione è palesemente bimodale: il 23% dei fondali oceanici giace a profondità comprese tra 4 e 5 km, il 21% delle terre emerse è a quote inferiori a 1000 m. L'elevazione media della crosta terrestre è -2440 m; la profondità media degli oceani -3795 m, l'altezza media delle terre emerde +245 m sul livello medio del mare.

Dalla fig. 3 si ricava l'istogramma cumulativo (cfr. par. IX.2) rappresentato in fig. 4, che approssima la cosiddetta "curva ipsografica" della superficie terrestre. Considerato un punto di tale curva, la sua ascissa dà la percentuale della superficie terrestre situata a quote superiori a quella della sua ordinata. Le fig. 3 e 4 contengono le stesse informazioni, visualizzate in due modi diversi.

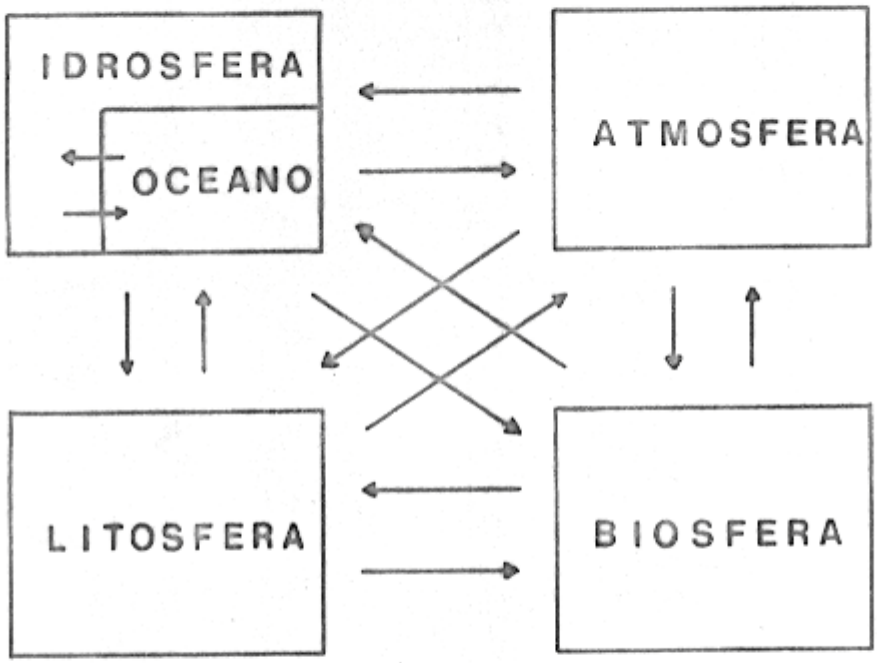


Fig. I.1 - Interazioni su scala planetaria.

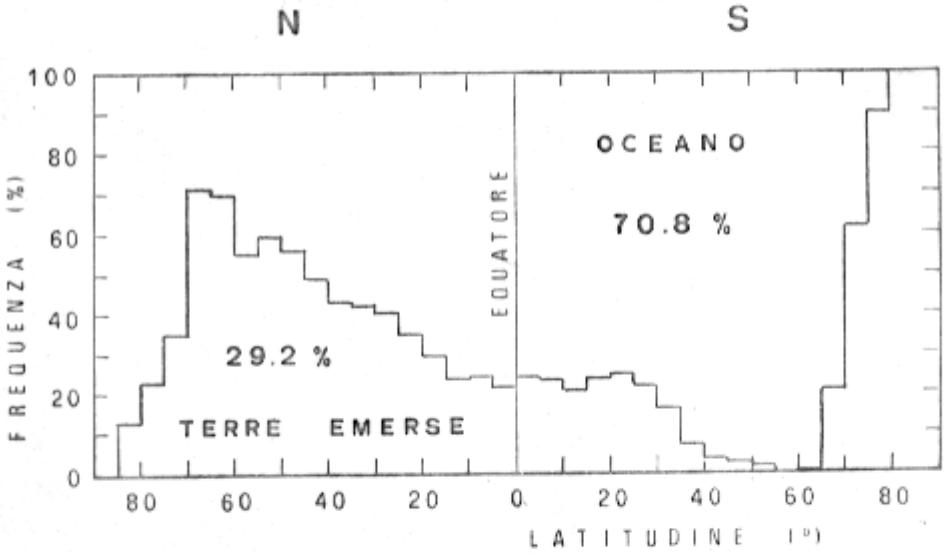


Fig. I.2 - Distribuzione zonale delle terre emerse e degli oceani.

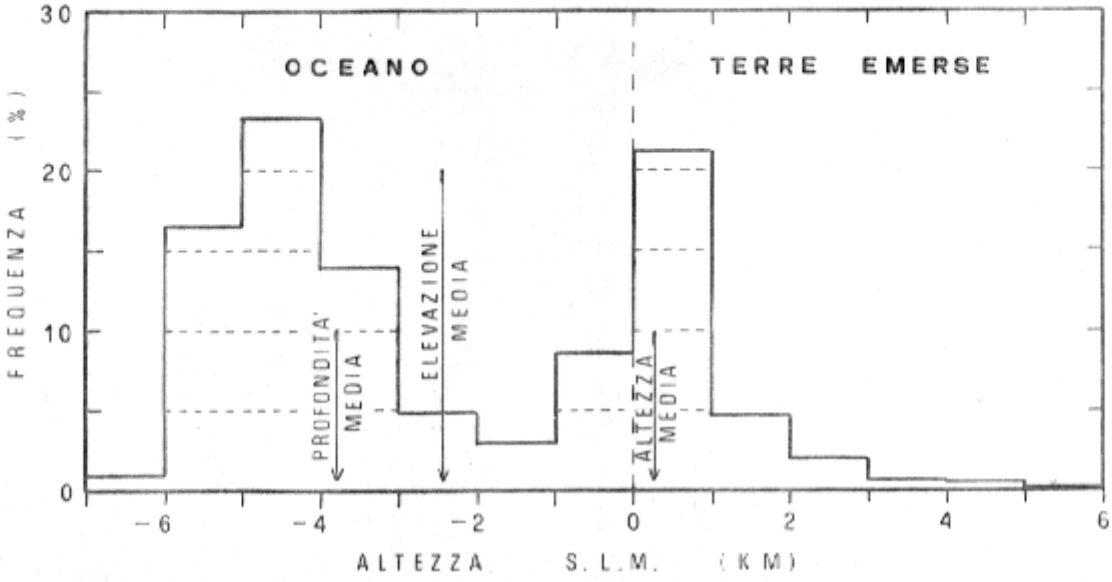


Fig. I.3 - Istogramma delle elevazioni della superficie terrestre (Kossinna, 1921).

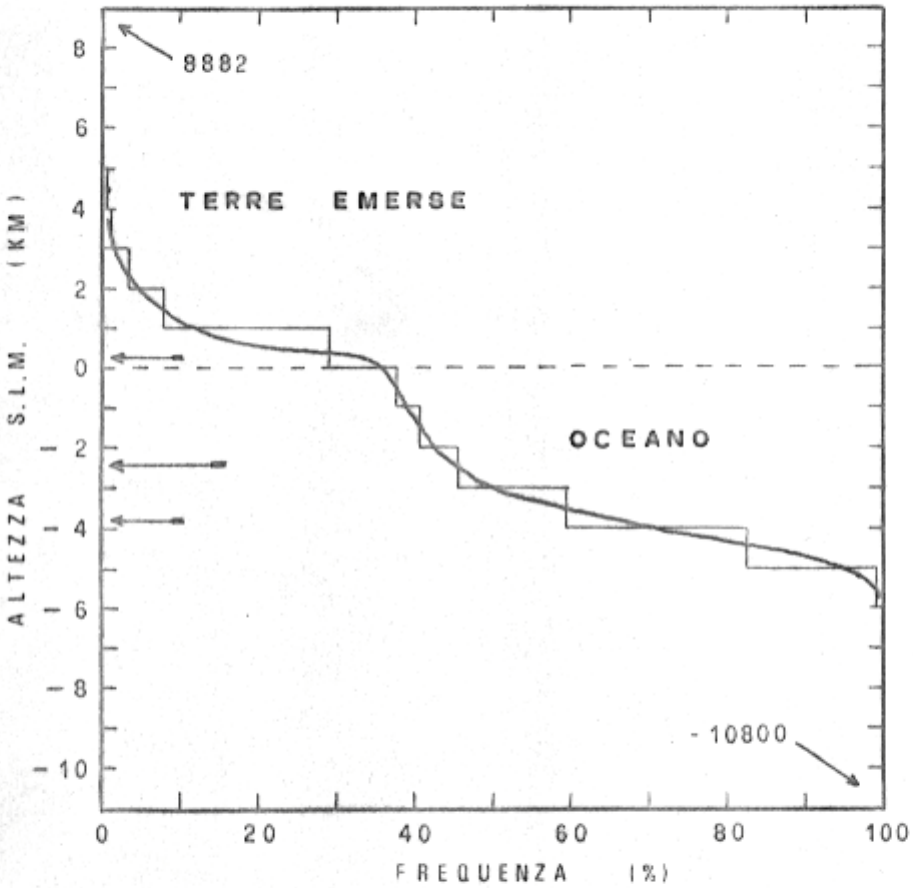


Fig. I.4 - Curva ipsografica della superficie terrestre (Kossinna, 1921).

II. DESCRIZIONE CHIMICO - FISICA DEGLI OCEANI

1. Composizione chimica dell'acqua di mare. La concezione dell'oceano come sistema chimico è progredita da una prima visione dell'acqua di mare come accumulo di sali ad un modello in cui la stessa è considerata una soluzione, la cui composizione è controllata da equilibri, o da fattori cinetici, che possono condurre ad uno stato sia stazionario che non stazionario. In questa ottica, l'oceano va riguardato come un sistema aperto, in continua interazione con ciò che lo circonda, e parte importante del ciclo globale di lavaggio, trasporto e sedimentazione dei materiali.

L'oceano è costituito per il 96.5% di acqua, e per il 3.5% di materiali disciolti in forma di molecole o ioni, cui si aggiungono colloidi e particelle sospese.

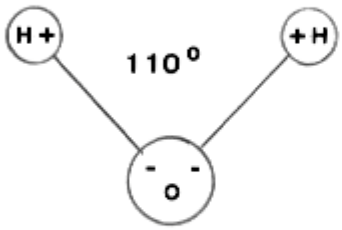


Fig. II.1- Molecola di H_2O.

La molecola dell'acqua (H_2O) possiede una struttura asimmetrica e quindi un elevato momento di dipolo elettrico (fig. 1). Tale proprietà, unitamente al piccolo volume della molecola, conferisce all'acqua pura una costante dielettrica che è la più alta tra tutti i liquidi: il che la rende un ottimo solvente. Le molecole di H_2O hanno una spiccata tendenza a polimerizzare, ovvero a legarsi tra loro, per mezzo di deboli legami idrogeno, a gruppi di due, tre o più. Il grado di polimerizzazione decresce con la temperatura, ed influisce considerevolmente sulla tensione superficiale e sulla viscosità dell'acqua, sul suo calore specifico, sui suoi elevati punti di fusione e di ebollizione, sul calore latente di evaporazione.

L'asimmetria della molecola d'acqua, oltre ad influire sulla sua costante dielettrica e sul suo potere di associazione, fà anche sì che siano possibili diverse strutture di aggregazione, con diverso numero di molecole per unità di volume; il passaggio dall'una all'altra struttura, combinato con il processo termico di depolimerizzazione, ha come conseguenza che l'acqua pura ha un massimo di densità a 4 °C circa. Il ghiaccio ha la struttura meno densa, a forma di tetraedro.

L'esistenza di isotopi ^1H di massa uno ed ^2H di massa due per l'idrogeno, e di isotopi ^{16}O, ^{17}O, ^{18}O di corrispondente massa per l'ossigeno, rende possibile la formazione di nove diverse molecole. Quasi tutte sono del tipo $^1H_2^{16}O$, le altre (per esempio $^2H_2^{16}O$ o acqua pesante, $^1H_2^{18}O$, $^1H_2^{17}O$, $^1H^2H^{16}O$) costituiscono meno del $3^o/_{oo}$ del volume totale; tale percentuale, anche se piccola, è però dello stesso ordine della concentrazione di altri elementi presenti nell'acqua di mare.

L'acqua pura in conclusione è un solvente complesso e potente, che raccoglie e porta nell'oceano praticamente tutti gli elementi conosciuti. La con-

centrazione di ogni singolo elemento nell'oceano, nella concezione evolutiva esposta all'inizio del paragrafo, è quindi una funzione del tempo e dello spazio; a causa però della lunghezza del tempo medio di permanenza di ogni specie, ed escludendo le zone di mare a contatto con la superficie e con le rive, le concentrazioni stesse si possono ritenere in prima approssimazione stazionarie, soprattutto per quanto riguarda i componenti principali. Questo dato di fatto giustifica l'ipotesi di lavoro della costanza dei rapporti delle concentrazioni degli elementi principali presenti nell'acqua di mare, che vengono pertanto ritenuti conservativi.

elemento	g/kg (°/₀₀)
Cl	19.374
Na	10.774
SO_4	2.712
Mg	1.294
Ca	0.412
K	0.399
Br	67.3×10^{-3}
Sr	7.94×10^{-3}

Tab. II.1- Costituenti principali dell'acqua di mare.

La tabella 1 riporta le concentrazioni dei costituenti principali (superiori cioè ad 1 mg/kg = 1 ppm - parte per milione-), con riferimento ad 1 kg d'acqua di mare contenente 35 g di soluto. I dati sono stati ricavati da accurate analisi su campioni di tutti i mari; le variazioni sono entro i limiti degli errori analitici, tranne che per il calcio ed il magnesio. La concentrazione di Ca mostra sistematicamente un aumento con la profondità; la concentrazione di Mg presenta invece piccole variazioni casuali.

2. La salinità. Da un punto di vista idrodinamico l'acqua può essere considerata un mezzo omogeneo, caratterizzato da una densità funzione dello spazio e del tempo; per una descrizione chimica completa, il fine teorico sarebbe invece la conoscenza dell'evoluzione spazio-temporale della concentrazione di ogni singolo elemento. Con l'introduzione del concetto di salinità, definita come il contenuto totale di materiali disciolti in un campione d'acqua, ci si limita a considerare due sole fasi.

La salinità S si misura in "per mille" (°/₀₀), ovvero in g/kg (grammi di sale per kg di acqua di mare), in genere con una precisione di 0.001 - 0.003 °/₀₀. Assieme alla temperatura, la salinità è il fattore che maggiormente determina la densità dell'acqua di mare e le altre sue proprietà. Il parametro S è molto usato nella pratica oceanografica per la costruzione di diagrammi caratteristici, per la descrizione di masse d'acqua ecc.

La determinazione diretta della salinità di un campione per evaporazione dell'acqua causa un'alterazione dei materiali disciolti ed è poco pratica; le misure correnti si basano sulla determinazione della "clorinità" Cl (°/₀₀), o, più recentemente, su misure di conducibilità elettrica.

Il cosiddetto comitato Knudsen, all'inizio del secolo, adottata l'ipotesi della costanza dei rapporti tra le concentrazioni degli elementi principali, ha eseguito la determinazione diretta della salinità e la misura del contenuto in cloro (l'elemento principale) su nove campioni d'acqua di mare, stabilendo la seguente relazione lineare:

$$S\ (°/_{00}) = 0.03 + 1.805\ Cl\ (°/_{00})\ . \qquad (1)$$

Il medesimo comitato introdusse e definì sul piano operativo la misura della

clorinità come metodo di routine per la determinazione della salinità, ed introdusse l'uso di campioni d'acqua di mare standard, appositamente costruiti, per la calibrazione; stabilì inoltre la relazione tra la densità, la salinità e la temperatura. La relazione (1) di Knudsen viene tuttora usata nella pratica di laboratorio; da un punto di vista formale, si noti la presenza della costante 0.03, dovuta ai particolari campioni esaminati, che contraddice l'ipotesi della costanza dei rapporti.

Lo sviluppo dell'elettronica ha reso possibile, negli ultimi anni, l'esecuzione di misure precise e rapide della conducibilità elettrica dell'acqua di mare; tale grandezza (R) è collegata con la salinità e quindi con la densità. Della definizione di queste relazioni si è fatto carico negli anni '60 un apposito comitato dell'UNESCO, che ha stabilito la seguente relazione tra la conducibilità a 15°C e la salinità:

$$S\ (^{\circ}/_{\circ\circ}) = 0.08996 + 28.29720\ R + 12.80832\ R^2 - 10.67869\ R^3 + 5.98624\ R^4 - 1.32311\ R^5. \qquad (2)$$

Ha inoltre stabilito, per l'eventuale conversione della clorinità in salità, l'uso della relazione:

$$S\ (^{\circ}/_{\circ\circ}) = 1.80655\ Cl\ (^{\circ}/_{\circ\circ}). \qquad (3)$$

La differenza tra i valori di salinità calcolati con la (1) e con la (3) è nulla per $S = 35\ ^{\circ}/_{\circ\circ}$, ed inferiore a $0.01^{\circ}/_{\circ\circ}$ per la maggioranza dei campioni. Scompare nella (3) il termine costante, ed è rispettata la costanza dei rapporti.

La definizione operativa del concetto di salinità è in conclusione cosa tutt'altro che banale, che richiede accurate e precise norme internazionali; non si dimentichi per altro che la definizione fisica è elementare.

La distribuzione della salinità negli oceani è stata esaminata da Cochrane, Pollak e Montgomery (1958), sulla base di alcune migliaia di campioni d'acqua provenienti dai mari di tutto il mondo. Per ogni campione è stato stimato il volume d'acqua da esso rappresentato; la somma dei volumi di tutti i campioni distribuiti in classi di ampiezza $0.1^{\circ}/_{\circ\circ}$ di salinità, rapportata al volume totale dell'oceano, dà la distribuzione percentuale dei valori di salinità. La fig.2 rappresenta l'istogramma così ottenuto, con riferimento alle salinità tra 33.5 e $36.0^{\circ}/_{\circ\circ}$ (98.5% del totale).

3. Gas disciolti nell'acqua di mare. Attraverso la superficie di separazione tra l'atmosfera e l'oceano avviene uno scambio continuo di molecole gassose: la direzione del flusso è regolata dalla differenza tra le pressioni parziali che ogni gas ha nell'aria e in soluzione.

Si può considerare un modello come quello schematizzato in fig. 4; il flusso

$$F = k\ (S_a - S_m)\ , \qquad (4)$$

misurato in $g\ cm^{-2}/sec$, è proporzionale alla differenza delle concentrazioni $S\ (g\ cm^{-3})$ del gas nell'aria e nel mare: la costante di proporzionalità k si determina sperimentalmente. La diffusione del gas si realizza principalmente per trasporto molecolare attraverso la superficie di separazione; in seno

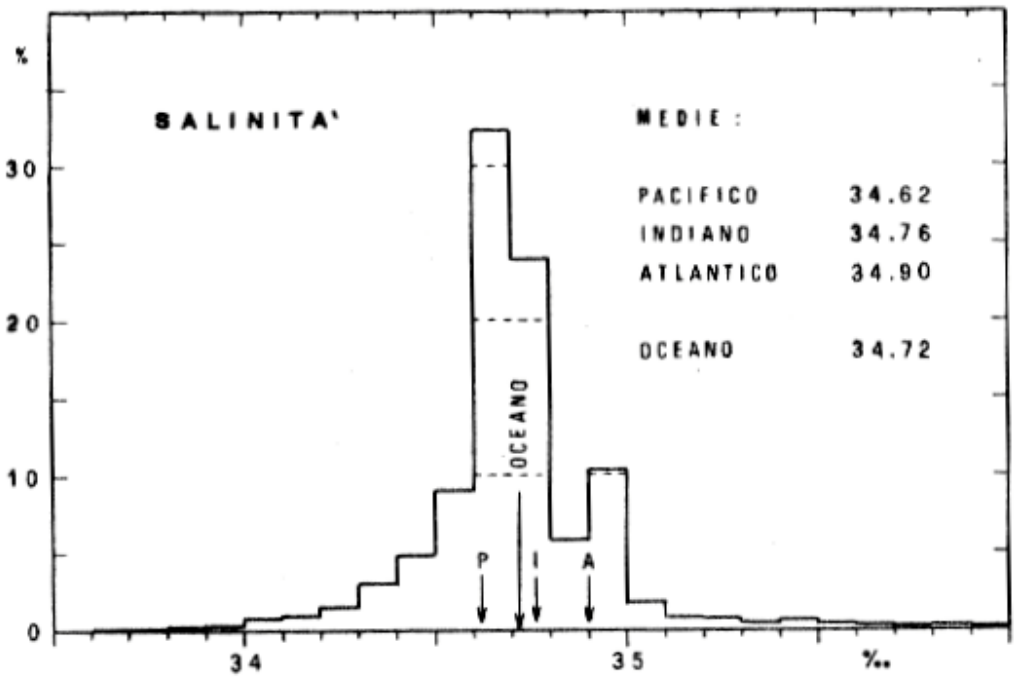


Fig. II.2 - Distribuzione della salinità nell'oceano.

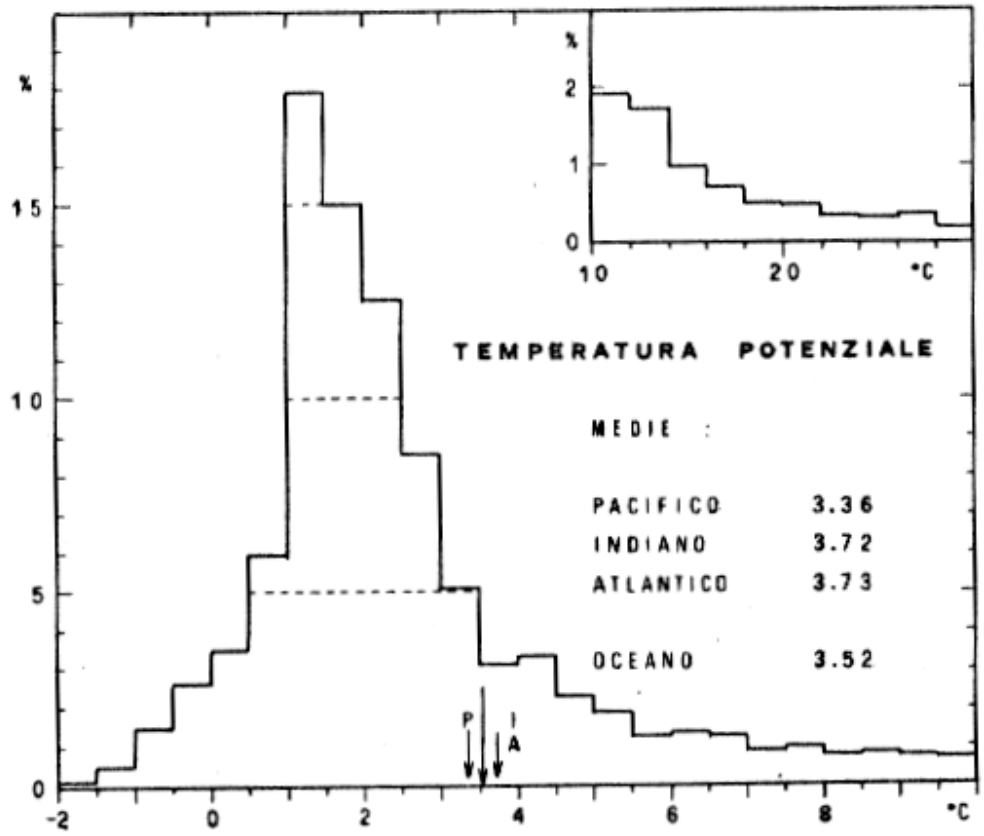


Fig. II.3 - Distribuzione della temperatura potenziale nell'oceano.

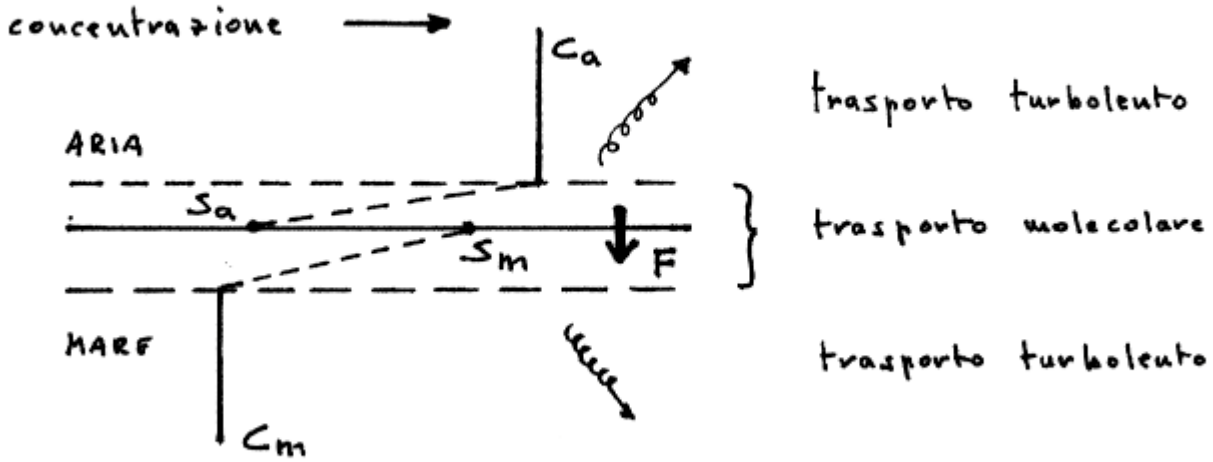


Fig. II.4- Modello dello scambio di gas alla superficie aria-mare.

all'aria o all'acqua è molto più efficace il meccanismo di trasporto turbolento, che coinvolge particelle o vortici di fluido di dimensioni variabili da micron a ettometri.

Per ogni gas esiste nell'acqua di mare una concentrazione di saturazione, o solubilità, funzione decrescente della temperatura e della salinità. Si possono distinguere gas conservativi, quali l'azoto e l'ossigeno nelle acque superficiali, che mantengono cioè la loro individualità anche in soluzione, e gas non conservativi i quali in soluzione interagiscono chimicamente con le altre specie presenti (ad esempio l'anidride carbonica). La tabella 2 fornisce le concentrazioni di N_2, O_2, CO_2 nell'atmosfera, e le rispettive solubilità, a diverse temperature, in acqua pura ed in acqua di mare alla salinità del 35°/$_{oo}$, a contatto con aria satura di vapore acqueo alla pressione di 1 atmosfera, con la composizione citata.

Pressioni parziali in aria		Solubilità (ml/l) nell'acqua di mare							
		S = 0 ‰				S = 35 ‰			
Gas	%	0°	10°	20°	30°	0°	10°	20°	30°
N_2	78.08	18.42	14.51	11.90	10.06	14.19	11.40	9.51	8.16
O_2	20.95	10.22	7.89	6.35	5.28	8.05	6.32	5.17	4.35
CO_2	0.03	0.51	0.35	0.25	0.20	(non conservativo)			

Tab. II.2- Solubilità dei principali gas in acqua di mare, rispetto ad un'atmosfera a 100% di umidità relativa e pressione totale di 760 mm Hg.

4. Ossigeno. Il confronto tra la concentrazione di ossigeno disciolto misurata nelle acque superficiali e la sua corrispondente solubilità, mostra che in quasi tutti gli oceani esiste in superficie una situazione che approssima l'equilibrio con l'atmosfera sovrastante. Negli strati sottosuperficiali l'ossigeno è però coinvolto in processi biologici che ne modificano la concentrazione; negli strati cosiddetti eufotici vi è soprasaturazione di ossigeno dovuta a processi di fotosintesi, mentre in strati più profondi si osserva carenza di O_2 per effetto della respirazione e di altri processi di ossidazione. La differenza tra la concentrazione di ossigeno osservata e la

corrispondente concentrazione di saturazione è detta "utilizzazione apparente dell'ossigeno" (UAO). Dal momento che i valori di UAO rappresentano approssimativamente la quantità di O_2 consumata nella ossidazione biochimica del materiale organico, esiste una relazione tra i suddetti valori e la concentrazione di ioni tipo NO_3^- e PO_4^{---}, detti micronutrienti, formati dalla mineralizzazione della materia organica.

L'ossigeno libero dà luogo nell'acqua ad una reazione di ossidoriduzione:

$$O_2\,(gas) + 4\,H^+ + 4\,e^- \rightleftharpoons 2\,H_2O \quad . \qquad (5)$$

Quando l'ossigeno libero presente nel mare è esaurito, nei processi ossidativi vengono utilizzati altri donatori di ossigeno, quali i nitrati e, successivamente, i solfati: si formano quindi le acque cosiddette anossiche, presenti in talune aree con scarsa circolazione (per esempio nel Mar Nero).

Un esempio della variazione dell'ossigeno con la profondità è dato dalla fig. 6, dove si nota uno strato con soprasaturazione attorno ai 40 m di profondità.

5. Sistema dei carbonati e pH. Il carbonio nell'oceano, presente principalmente come specie inorganiche (CO_2 e derivati), entra nel ciclo globale di scambio schematizzato nella fig. I.1. Trascurando il carbonio organico, le fonti principali di carbonio per l'oceano sono l'anidride carbonica presente nell'atmosfera e le acque fluviali.

L'anidride carbonica con l'acqua dà acido carbonico che si dissocia in carbonati e ioni idrogeno:

$$CO_2(gas) + H_2O \rightleftharpoons H_2CO_3 \rightleftharpoons H^+ + HCO_3^- \rightleftharpoons 2\,H^+ + CO_3^{--} \quad . \qquad (6)$$

Le acque fluviali disciolgono, ad esempio, il carbonato di calcio ed immettono nel mare calcio e acido carbonico:

$$CaCO_3 + H_2O + CO_2 \rightleftharpoons Ca^{++} + 2\,HCO_3^- \quad ; \qquad (7)$$

L'effetto complessivo della presenza di anioni HCO_3^- e CO_3^{--} (6,7) e di CO_2 libera in soluzione è di rendere alcalina l'acqua di mare, il cui pH varia usualmente entro i limiti di 7.7 e 8.2 ($pH = -\log[H^+]$; [ ] indica concentrazione in moli/l). Le variazioni del pH sono associate soprattutto alle variazioni della concentrazione di CO_2 libera, collegate all'equilibrio superficiale, alla sua produzione in processi di respirazione e al suo consumo nella fotosintesi; un aumento dell'alcalinità e quindi del pH è pure causato da una maggiore immissione di carbonati con le acque di lavaggio. Quando è superato il prodotto di solubilità del carbonato di calcio, esso precipita:

$$Ca^{++} + CO_3^{--} \longrightarrow CaCO_3 \quad ; \qquad (8)$$

tale reazione esercita un effetto tampone contro l'aumento del pH.

Oltre ai carbonati, la specie dei borati $H_2BO_3^-$ è la sola fonte di alcalinità nelle acque normalmente ossigenate. L'alcalinità totale è quindi definita come somma dell'alcalinità dei carbonati e di quella dei borati:

$$\text{alcalinità totale} = \left\{ \left[HCO_3^-\right] + 2\left[CO_3^{--}\right] \right\} + \left[H_2BO_3^-\right] \quad ; \qquad (9)$$

essa si determina analiticamente in modo abbastanza spedito.

6. Temperatura. L'oceano è caratterizzato da un campo di temperatura, ovvero da una funzione $T(x,y,z,t)$ dello spazio e del tempo. La misura classica della temperatura prevede l'uso di termometri a mercurio, del tipo a rovesciamento (par. VIII.4), i quali forniscono con la precisione di 0.01 °C un valore medio rispetto al tempo di risposta e al volume d'acqua che in tale tempo ha dilavato il bulbo. L'uso di più moderni termometri elettronici, molto più pronti, riduce di conseguenza l'intervallo spazio-temporale nel quale si opera la misura. Comunque sia, il valore di temperatura T così ottenuto, che ai fini pratici si considera senz'altro puntuale, è detto temperatura osservata, o "in situ". Questo aggettivo, di per sè superfluo, viene aggiunto al solo scopo di ricordare che la temperatura T è una funzione di altri parametri locali, per esempio della pressione .

Per caratterizzare e confrontare diverse masse d'acqua mobili nell'oceano, è utile riferire la loro temperatura ad una identica pressione di riferimento. Si definisce pertanto la "temperatura potenziale" ϑ , ossia la temperatura finale di un campione d'acqua portato adiabaticamente e senza mescolamenti dalla pressione p in situ alla pressione p_o di 1 atmosfera, cioè alla superficie del mare:

$$\vartheta = T + \int_p^{p_o} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right) dp \quad ; \qquad (10)$$

la parentesi ricorda che la trasformazione avviene, secondo la definizione, a entropia e salinità costanti. La temperatura potenziale è quindi una costante del moto che caratterizza una massa d'acqua fintantochè questa non si mescoli e non scambi calore con l'ambiente. L'integrale nella (10) è sempre negativo nell'oceano (se l'acqua non è troppo dolce e fredda), e rappresenta il raffreddamento adiabatico che accompagna il passaggio dalla pressione p alla superficie. Tale raffreddamento dipende dalla temperatura, dalla salinità e dalla pressione in situ; per dare un'idea della sua entità, si pensi che esso è inferiore a 0.01 °C per una temperatura di 15° a 100 m di profondità, è uguale a circa 0.5 °C per una temperatura di 2° a 5000 m di profondità, alla salinità del 35°/$_{oo}$. In media, il gradiente adiabatico della temperatura è circa 0.1 °C/km.

La distribuzione della temperatura potenziale nell'oceano è rappresentata in fig. 3: la fonte dei dati e le modalità di costruzione dell'istogramma sono le stesse di cui si è detto a proposito della salinità (par. 2; fig. 2). In particolare risulta che metà dell'oceano ha una temperatura potenziale inferiore a 2.1 °C. Le temperature potenziali medie degli oceani si aggirano attorno a 3.5 °C; le temperature effettive sono superiori di circa 0.2 °C.

Le tipiche variazioni della temperatura con la profondità sono schematizzate in fig. 5. Lo strato superficiale dell'oceano immagazzina durante

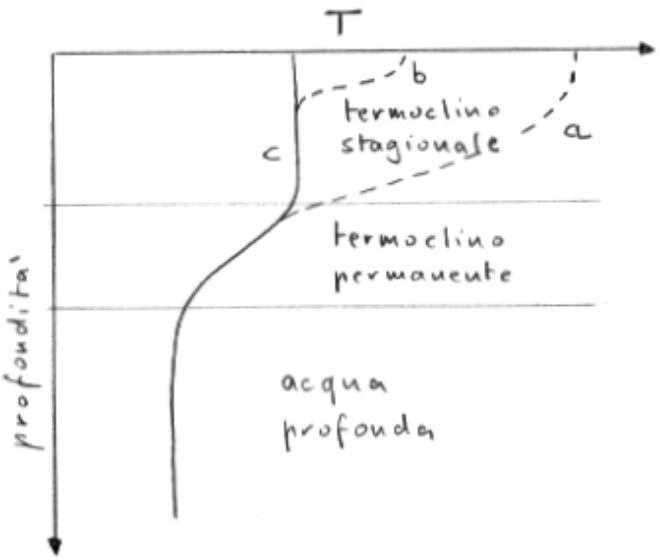


Fig. II.5- Profilo verticale della temperatura.

l'estate grandi quantità di energia termica dal sole, e la restituisce all'atmosfera durante l'inverno, con un'azione globale termostatizzante. Un termoclino, ossia uno strato con una marcata variazione di temperatura, permanente separa le acque superficiali da quelle profonde, praticamente omoterme. Termoclini stagionali si formano e si evolvono nello strato superficiale, passando da una situazione estiva (a) di forte riscaldamento, ad una (b) di riscaldamento moderato, sino al caso limite di una completa omotermia invernale (c).

7. Pressione. Nell'oceano si genera idrostaticamente, per effetto della gravità, un campo di pressione $p(x,y,z,t)$ (par. III.4). La pressione è una forza che si esercita perpendicolarmente ad una superficie unitaria, ed ha le stesse dimensioni di una densità di energia. L'unità di misura cgs è 1 bar = 10^6 dine/cm^2 = 0.9869 atmosfere standard; in oceanografia si usa il db (decibar), che corrisponde all'incirca alla variazione di pressione per un metro di profondità. La pressione esercitata da tutta l'atmosfera alla superficie del mare, in media 10.13 db, è raggiunta nell'oceano a circa 10 m di profondità. La pressione idrostatica alla profondità z è data da (z positiva verso il basso):

$$p(z) = p(0) + \int_0^z \rho\, g\, dz \quad ; \tag{11}$$

considerando costante l'accelerazione di gravità g, in un oceano omogeneo di densità $\rho = \rho_0$ si ha

$$p(z) - p(0) = \rho_0\, g\, z \quad . \tag{12}$$

In virtù della proporzionalità (12), è comune l'uso di misure di pressione per la determinazione della profondità.

Si usa anche definire la cosiddetta profondità dinamica:

$$D(z) = \frac{1}{10} \int_0^z g\, dz \quad ; \tag{13}$$

1 m dinamico = $(10/g)$ m e varia con l'accelerazione di gravità; esso è pari a 1.017 m ai poli, a 1.022 m all'equatore.

Le superfici di egual pressione, o superfici isobariche, sono orizzontali nel caso statico descritto da (12); in generale, esse saranno variamente inclinate, consentendo l'esistenza di gradienti di pressione orizzontali.

Le superfici isobariche sono considerate come un riferimento per altri campi; vengono detti barotropici o baroclinici a seconda che le loro superfici di livello siano parallele o no alle superfici isobariche.

8. Densità ed equazione di stato. La densità volumetrica della massa, o semplicemente densità, è definita dalla derivata della massa rispetto al volume:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{dm(\mathbf{x}, t)}{dV} ; \tag{14}$$

ρ è una funzione dello spazio e del tempo, come tutte le variabili oceaniche. L'inverso della densità è il volume specifico

$$\alpha = \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dm} . \tag{15}$$

La densità dell'acqua di mare dipende dalle sue caratteristiche fisico-chimiche; in genere si considera un'equazione di stato del tipo:

$$\rho = \rho(p,T,S) . \tag{16}$$

Non esiste una forma analitica semplice per l'equazione (16); nella letteratura si trovano varie forme di sviluppi in serie, tra cui, per esempio, quello riportato da Wilson e Bradley (1968):

$$\rho(p,T,S) = \left\{0.702 + A/B\right\}^{-1} , \tag{17}$$

$$A = 1752.73 + 11.01\,T - 0.0639\,T^2 - 3.9986\,S - 0.0107\,T\,S ,$$

$$B = p + 5880.9 + 37.592\,T - 0.34395\,T^2 + 2.2524\,S ,$$

dove p è in bar, T in °C, S in $^o/_{oo}$. Tipiche variazioni di ρ per separate variazioni unitarie nelle tre variabili p,T,S sono:

$$\begin{array}{lll} \Delta p = +1 \text{ bar} & : & \Delta\rho = +0.05\ ^o/_{oo} , \\ \Delta T = +1\ ^oC & : & \Delta\rho = -0.2\ ^o/_{oo} , \\ \Delta S = +1\ ^o/_{oo} & : & \Delta\rho = +1\ ^o/_{oo} . \end{array}$$

Data la piccola variazione percentuale della densità rispetto al suo valore medio che è di poco superiore ad 1 g/cm^3, si usa definire la cosiddetta "sigma":

$$\sigma(p,T,S) = (\rho(p,T,S) - 1) \times 10^3 ; \tag{18}$$

ad esempio, invece di $\rho = 1.02754$ si usa il parametro $\sigma = 27.54$.

Il parametro di densità più usato in oceanografia è la cosiddetta "sigma-ti", cioè la densità σ ridotta alla pressione atmosferica:

$$\sigma_t \equiv \sigma(1,T,S) = (\rho(1,T,S) - 1) \times 10^3 . \tag{19}$$

Per effetto della minor compressione, si ha che $\sigma_t \leq \sigma$.

Riducendo σ_t alla temperatura di 0°C si ha la σ_o , funzione della sola S.

Si definisce anche una σ_ϑ in funzione della temperatura potenziale e della salinità; la densità potenziale $\rho(p,\vartheta,S) = 1 + 10^{-3}\sigma_\vartheta$ è la densi-

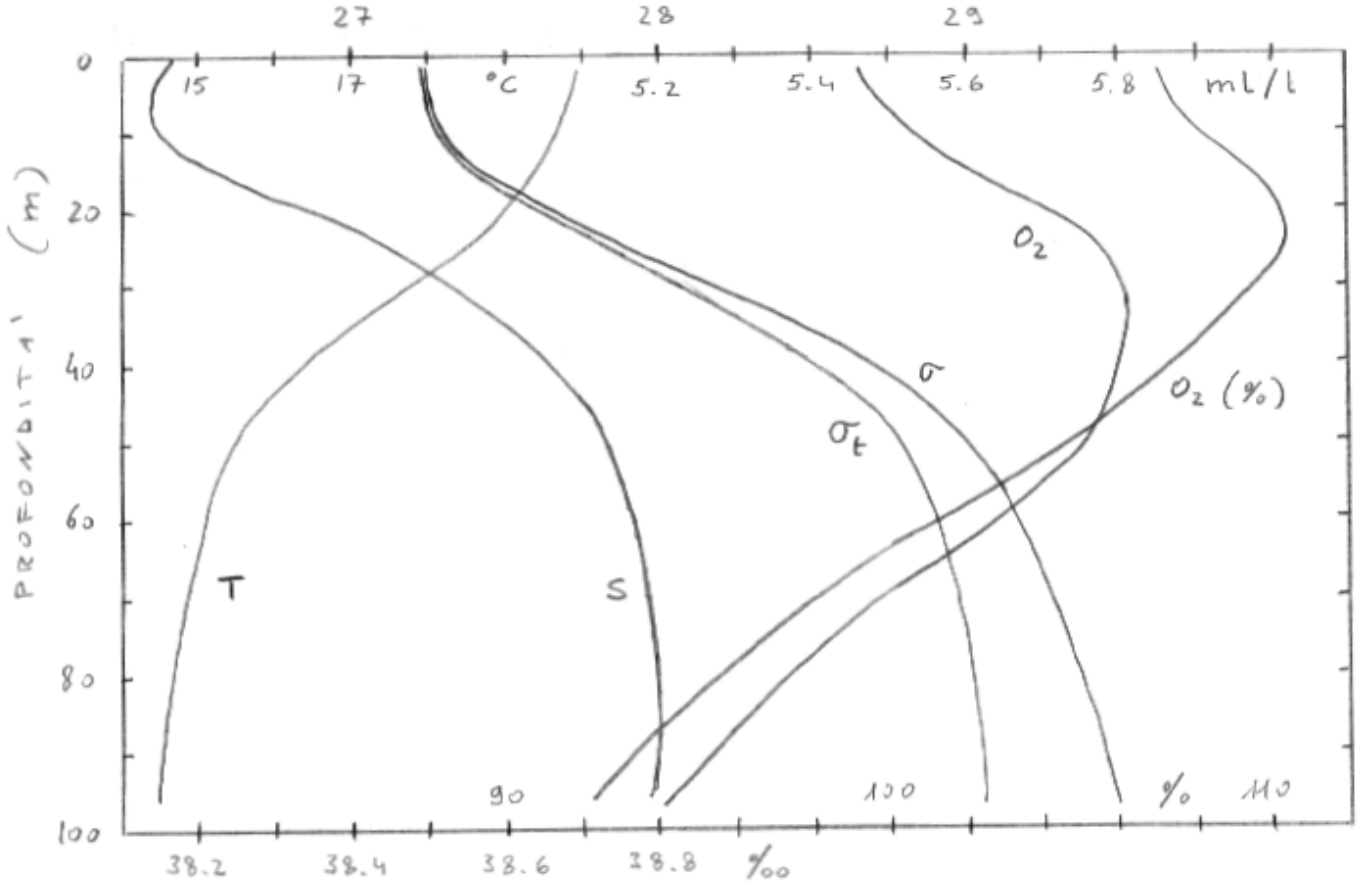


Fig. II.6- Profili verticali rilevati al largo di Otranto (ottobre 1976).

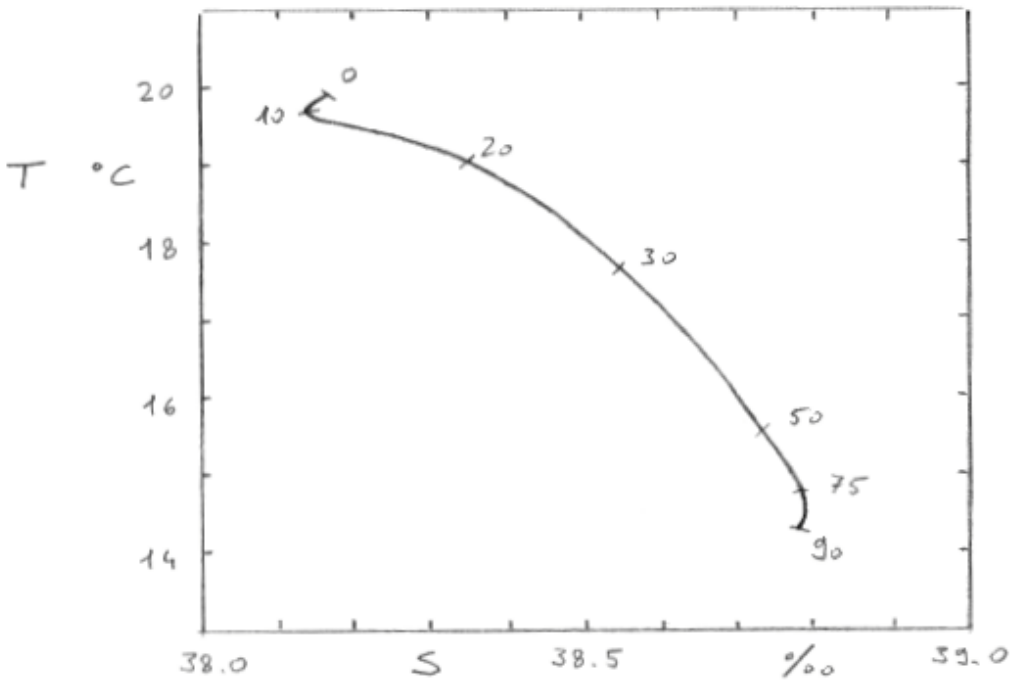


Fig. II.7- Diagramma T-S relativo ai profili T, S della fig. 6.

tà di un campione d'acqua portato adiabaticamente alla superficie del mare.

Le tabelle di Knudsen (par.2) permettono di calcolare σ_0 in funzione della salinità; sono date poi correzioni additive per riportarsi alle condizioni in situ: l'insieme di queste tabelle equivale alla definizione di un'equazione di stato.

Per quanto riguarda le variazioni della densità con la profondità, esse sono logicamente correlate con le corrispondenti variazioni di T e di S tramite l'equazione di stato (17). In particolare ad un termoclino corrisponde di solito un picnoclino, cioè uno strato con accentuate variazioni di densità.La fig. 6 riporta, a titolo di esempio, le curve verticali medie misurate su di un fondale di 100 m al largo di Otranto nell'ottobre del 1976; oltre a T(z), S(z) sono riportate, per la densità, la σ e la σ_t , e per l'ossigeno la concentrazione in ml/l e la percentuale rispetto al valore di saturazione in situ. In particolare si osservano due strati: acqua calda, poco salata e perciò leggera sopra acqua più fresca e salata e quindi più pesante; termoclino, aloclino e picnoclino sono ben sviluppati.

9. Tipi di acqua e diagrammi T-S. In una data stazione (x,y) nell'oceano si hanno determinati profili verticali T(z), S(z) (es. fig. 6), che variano notevolmente nel tempo. Una maggiore stabilità si nota invece nella funzione T = T(S), la cui rappresentazione grafica è nota con il nome di "diagramma T-S". Ogni punto della curva T(S) rappresenta un "tipo d'acqua" caratterizzato da una data temperatura e salinità; il grafico rappresenta l'insieme dei tipi d'acqua incontrati in una colonna verticale, senza distinguerne le rispettive profondità. Se queste ultime devono essere evidenziate, basta scriverne i valori accanto a punti della curva (es. fig. 7).

Esaminiamo, a titolo di esempio, una situazione a tre strati omogenei non mescolati di caratteristiche termoaline (T_1,S_1), (T_2,S_2), (T_3,S_3). La fig. 8 rappresenta in questa situazione i profili verticali della temperatura e della salinità; il diagramma T-S è costituito dai punti 1,2,3 che individuano i corrispondenti tipi d'acqua. La stratificazione discontinua sarà a poco a poco modificata dal mescolamento dei tre tipi di acqua : si formano acque con salinità e temperatura intermedie a quelle di partenza, proporzionali alle rispettive masse mescolate. I profili T(z), S(z) si modificano come indicato dalle curve tratteggiate; in corrispondenza appaiono sul diagramma T-S tutti i punti appartenenti ai due segmenti di estremi 1,2 e 2,3. Ad un mescolamento più avanzato corrisponderà una curva T-S regolare, in cui si è smussato il vertice 2 della spezzata. Viceversa, schematizzando una curva T-S con una spezzata, i vertici di questa individuano tipi d'acqua esistenti in quella stazione prima dell'attuale mescolamento.

Essendo σ_t una funzione di T e di S, si possono riportare sul diagramma T-S le isopicne o linee di ugual σ_t : dalla sovrapposizione di queste al grafico T(S) emergono utili considerazioni riguardanti la stabilità della colonna d'acqua. Dove infatti la curva T(S) taglia le isopicne nel senso che a maggiore profondità corrisponde maggiore densità l'equilibrio è stabile, e viceversa (fig. 9).

Dalla curvatura delle isopicne, che presentano sul diagramma T-S una

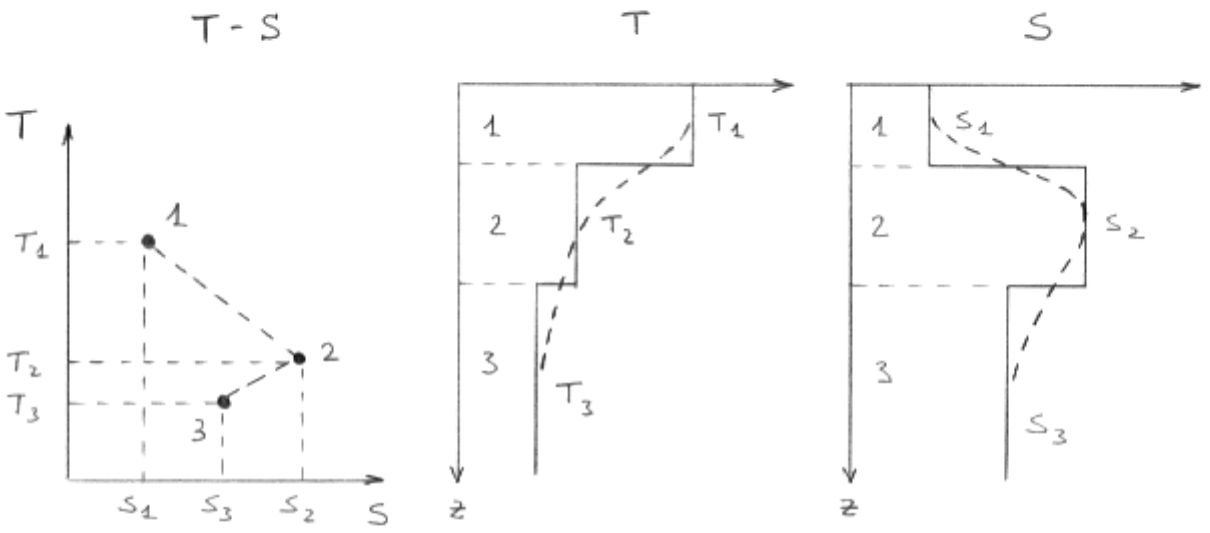


Fig. II.8- Esempio di stratificazione e mescolamento.

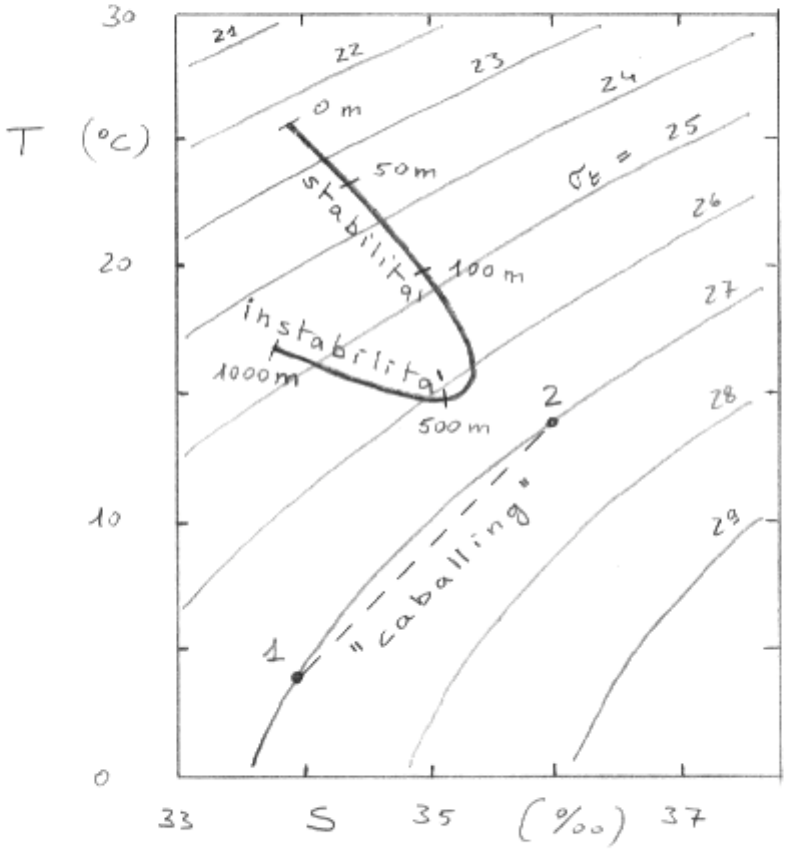


Fig. II.9- Stabilità e "caballing".

MASSA D'ACQUA		T (°C)	S (°/₀₀)	O_2 (ml/l)
AACP	circumpolare antartica	0	34.7	5
AAB	antartica di fondo	0	34.6	5-6
NAD+B	nord-atlantica profonda e di fondo	2-4	34.9	5-7
AAI	intermedia antartica	4	34.2	5-7
NAC	nord-atlantica centrale	18 8	36.5 35.1	4-5
SAC	sud-atlantica centrale	18 8	35.9 34.6	4-5
M	mediterranea	12	36.5	

Tab. II.3- Classificazione delle masse d'acqua nell'oceano Atlantico.

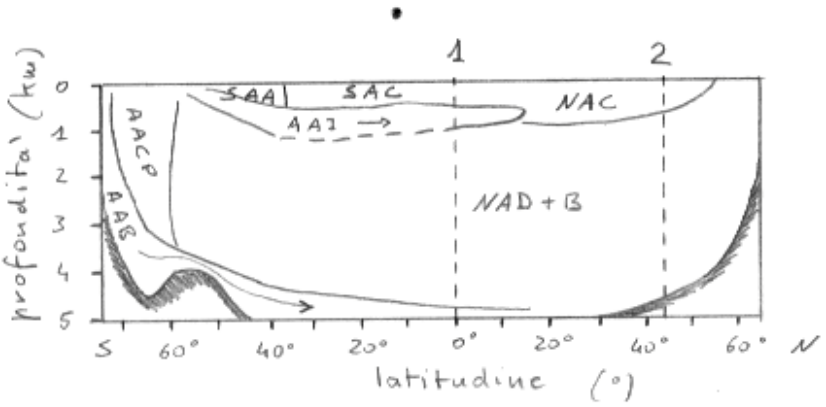


Fig. II.10- Distribuzione zonale verticale delle masse d'acqua nell'oceano Atlantico.

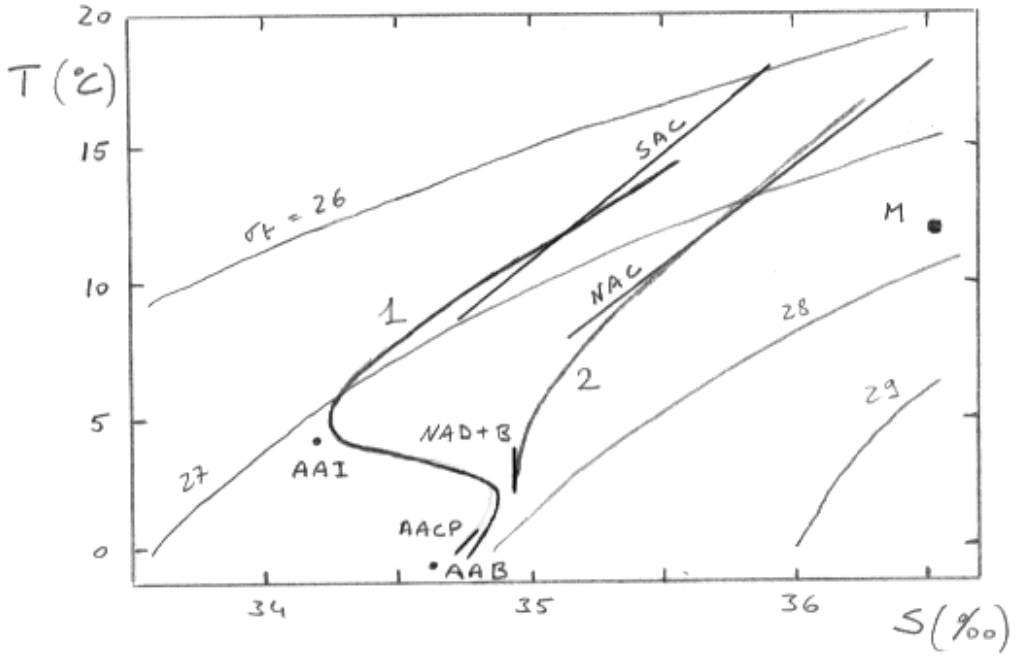


Fig. II.11- Rappresentazione su diagramma T-S delle masse d'acqua nell'oceano Atlantico.

concavità verso il basso, emerge un'altra considerazione. Se due tipi d'acqua di caratteristiche (T_1,S_1) e (T_2,S_2) e di uguale σ_t si mescolano, si formano tutti i valori intermedi di temperatura e salinità per cui la curva T-S si evolve dai punti 1,2 al segmento che ha tali punti come estremi (fig. 9); l'acqua mescolata ha però una densità maggiore di quella di partenza, per cui tende ad affondare. Tale fenomeno prende il nome di "caballing".

Le caratteristiche termoaline delle principali masse d'acqua presenti negli oceani e nei mari del globo sono abbastanza ben conosciute e classificate. La tabella 3 riporta le masse d'acqua dell'oceano Atlantico con i rispettivi valori caratteristici di temperatura, salinità e ossigeno. La fig. 10 rappresenta una sezione longitudinale verticale dell'Atlantico, con la collocazione delle suddette masse d'acqua; la fig. 11 infine ne dà la rappresentazione sul diagramma T-S: le curve 1 e 2 si riferiscono alle colonne verticali 1,2 di fig. 10.

10. Propagazione del suono. L'acqua si comporta, per quanto riguarda le frequenze acustiche, come un mezzo elastico, nel quale le onde longitudinali sonore si propagano con facilità; è offerta così una possibilità pratica di trasmissione di segnali a distanze considerevoli, e di misura di distanze da oggetti riflettenti.

La **velocità di propagazione** c di un'onda acustica in un mezzo fluido-elastico, nel nostro caso l'acqua di mare, può essere messa in relazione con il coefficiente K di compressibilità isoterma, la densità ϱ ed il rapporto $\gamma = c_p/c_v$ tra il calore specifico a pressione costante e quello a volume costante:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma}{\varrho K}} \quad . \tag{20}$$

La velocità del suono (20) dipende dalle proprietà fisiche e termodinamiche dell'acqua di mare; in generale, essa si può ricondurre ad una funzione c(p,T,S) delle variabili pressione, temperatura e salinità. Una relazione funzionale di questo tipo può essere espressa con uno sviluppo in serie, i cui coefficienti sono determinabili sperimentalmente: la formula più accurata è quella di Wilson (1960), valida per salinità nell'intervallo tra 33 $^o/_{oo}$ e 37 $^o/_{oo}$; esprimendo p in db, T in °C ed S in $^o/_{oo}$, la velocità del suono in m/sec è data da

$$c = 1304.97 + c(p) + c(T) + c(S) + c(p,T,S) \quad , \tag{21}$$

$$c(p) = 15.43 \times 10^{-3} p + 1.75 \times 10^{-6} p^2 + 0.35 \times 10^{-9} p^3 - 0.36 \times 10^{-12} p^4 ,$$

$$c(T) = 50.42 \times 10^{-1} T - 5.46 \times 10^{-2} T^2 + 0.28 \times 10^{-3} T^3 - 0.01 \times 10^{-4} T^4 ,$$

$$c(S) = 68.51 \times 10^{-1} S - 7.80 \times 10^{-2} S^2 ,$$

$$\begin{aligned} c(p,T,S) = & - 2.06 \times 10^{-4} pT + 1.33 \times 10^{-5} pT^2 - 0.07 \times 10^{-6} pT^3 \\ & - 2.39 \times 10^{-7} p^2T + 0.09 \times 10^{-10} p^2T^2 - 1.75 \times 10^{-10} p^3T \\ & + 2.61 \times 10^{-4} pS - 1.96 \times 10^{-7} p^2S \\ & - 1.20 \times 10^{-2} TS - 0.21 \times 10^{-5} pTS \quad . \end{aligned}$$

La velocità c è una funzione crescente delle tre variabili p,T,S; le variazioni sono dell'ordine seguente:

$$\Delta p = +1 \text{ db} : \quad \Delta c = +0.02 \text{ m/sec},$$
$$\Delta T = +1\ ^{\circ}\text{C} : \quad \Delta c = +3 \text{ m/sec},$$
$$\Delta S = +1\ ^{\circ}/_{oo} : \quad \Delta c = +1 \text{ m/sec};$$

in media, c è circa uguale a 1500 m/sec.

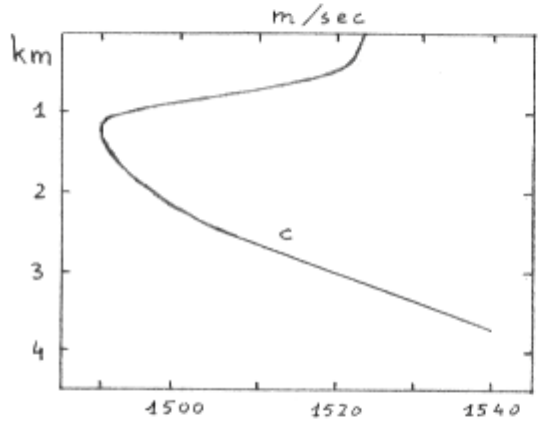


Fig.II.12- Profilo verticale della velocità del suono nell'oceano.

La fig. 12 mostra la tipica variazione della velocità del suono nell'oceano con la profondità: nello strato superficiale prevale l'effetto termico e c diminuisce con la temperatura; a profondità maggiori prevale l'effetto della pressione, e la velocità del suono cresce quasi linearmente date le piccole variazioni della temperatura e della salinità. Il fatto notevole è l'esistenza di uno strato con velocità di propagazione minima, coincidente con il termoclino, presente praticamente dovunque negli oceani a profondità tra 700 e 1500 m. Questo strato grosso modo orizzontale costituisce un canale sonoro che intrappola le onde acustiche permettendo la loro propagazione a lunghe distanze, e come tale viene sfruttato per l'invio di segnali. L'intrappolamento del segnale è dovuto alla rifrazione dell'onda sonora, la cui direzione, passando da uno strato a velocità c_1 ad uno con velocità c_2 piega rispetto alla normale dall'angolo ϑ_1 all'angolo ϑ_2 secondo la legge di Snell (fig. 13 a) :

$$\frac{\operatorname{sen} \vartheta_1}{\operatorname{sen} \vartheta_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad . \qquad (22)$$

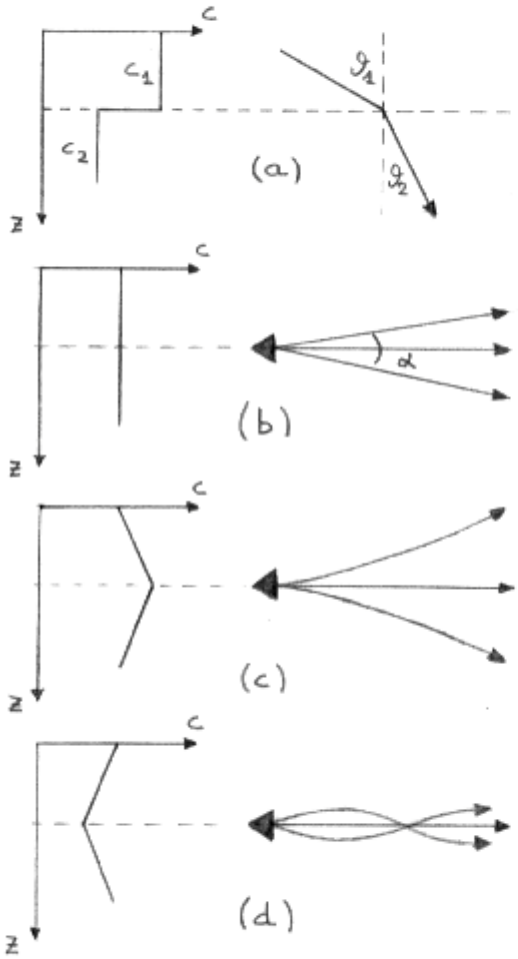


Fig.II.13- Rifrazione dell'onda sonora.

Una sorgente che emetta onde sonore in direzione orizzontale con un angolo di apertura α (fig. 13) dà luogo ad una propagazione rettilinea nel caso (b) di velocità c costante con la profondità; ad una propagazione divergente nel caso (c) in cui sia collocata ad una quota di velocità massima; nel caso (d), in cui la sorgente è posta ad una profondità di velocità minima, le onde acustiche non escono da uno strato che costituisce il canale sonoro.

L'intensità sonora I in un dato punto dell'oceano è definita come la varianza ovvero lo scarto quadratico medio (cfr. IX.2) p^2 del campo di pressione sonora:

$$I = p^2. \qquad (23)$$

La viscosità del mezzo fa sì che l'energia acustica che si propaga lungo una direzione x venga progressivamente dissipata in calore; si ammette che il decremento dell'ampiezza dell'onda sonora sia proporzionale all'ampiezza stessa:

$$\frac{dp}{dx} = -\alpha p , \qquad (24)$$

con un **coefficiente di assorbimento**

$$\alpha = \frac{8}{3}\pi^2 \frac{\mu f^2}{\rho c^3} \qquad (25)$$

proporzionale al coefficiente di viscosità μ ed al quadrato della frequenza acustica f, inversamente proporzionale alla densità ρ ed al cubo della velocità di propagazione. L'integrazione della (24) dà luogo ad un decremento esponenziale dell'ampiezza (e, per la (23), dell'intensità) dell'onda sonora lungo la direzione di propagazione x:

$$p(x) = p(0)\, e^{-\alpha x} , \qquad I(x) = I(0)\, e^{-2\alpha x} ; \qquad (26)$$

si definisce la **distanza di assorbimento** $x_e = 1/2\alpha$ alla quale l'intensità si riduce del fattore $1/e = 37\ \%$. La tab. 4 riporta la distanza di assorbimento viscoso, calcolata con la (25), assumendo ρ = 1.025 g/cm , c = 1500 m/sec, μ = 0.015 (cgs) in funzione della frequenza e della lunghezza d'onda $\lambda = c/f$. L'assorbimento reale nell'oceano è maggiore anche di due ordini di grandezza dell'assorbimento viscoso (25), e di conseguenza la distanza di assorbimento è anche 100 volte minore di quella indicata nella tab. 4; è stato provato che questo ulteriore assorbimento è dovuto all'insorgere di reazioni chimico-fisiche indotte nell'acqua di mare dall'onda sonora, ad opera specialmente del solfato di magnesio. L'energia sonora inoltre viene ulteriormente dispersa per ragioni geometriche di propagazione: nel caso illustrato in fig. 13 b, ove la propagazione avviene in un angolo solido α , la densità di energia diminuisce col quadrato della distanza dalla sorgente; nel caso (c) la riduzione è ancora maggiore, mentre nel canale sonoro (d) l'energia non viene dispersa, e l'unica attenuazione è quella dovuta al mezzo.

f (sec^{-1})	λ(cm)	x_e (km)
50	3000	17.5×10^6
500	300	17.5×10^4
5000	30	17.5×10^2
50000	3	17.5

Tab.II.4- Distanze d'assorbimento viscoso in acqua di mare.

L'ecoscandaglio è un dispositivo che permette di misurare la distanza di un oggetto riflettente in base al tempo di ritorno dell'onda sonora. La precisione nella misura della lunghezza dipende dalla precisione con cui è nota la velocità del suono nello strato compreso tra l'emettitore e l'oggetto. Il termine di ecoscandaglio è in genere riservato alle trasmissioni sonore in senso verticale per la misura della profondità. Ogni superficie di discontinuità però produce degli echi: il principale è solitamente quello del fondo, al quale si associano gli echi degli strati sottostanti e di oggetti immersi (banchi di pesci, strati riflettenti associati alle migrazioni del plancton). La scelta della frequenza di lavoro rappresenta un compromesso tra la maggior penetrazione delle onde lunghe e la migliore risoluzione degli oggetti propria delle onde più corte; si usano frequenze attorno a 20 KHz per gli usuali scandagli, sotto 1 KHz per l'indagine della strut-

ture del fondo. Il **sonar** è l'equivalente dell'ecoscandaglio disegnato per lavorare in direzione orizzontale, al fine di scoprire eventuali ostacoli lungo la rotta di un natante; in questo caso, la propagazione delle onde sonore, prima della riflessione, potrebbe essere quella illustrata in fig. 13 b,c,d.

11. Propagazione della luce. Si definisce l'intensità I_λ di un raggio luminoso monocromatico, cioè di lunghezza d'onda λ, come la quantità di energia elettromagnetica che attraversa nell'unità di tempo una superficie unitaria normale alla direzione x di propagazione. I_λ è dunque la densità spettrale del flusso di energia totale

$$I = \int_0^\infty I_\lambda \, d\lambda \quad ; \tag{27}$$

le unità di misura sono per esempio erg cm^{-2} sec^{-1}, cal cm^{-2} sec^{-1}, watt cm^{-2}. Lungo il suo percorso x attraverso l'acqua di mare, l'intensità luminosa I_λ decresce per assorbimento e per diffusione da parte dell'acqua, del materiale e degli organismi in sospensione (composti organici, pigmenti fitoplantonici); si assume che

$$\frac{dI_\lambda}{dx} = - K_\lambda I_\lambda \quad , \tag{28}$$

che dà luogo, nel caso in cui il **coefficiente di estinzione** K_λ sia indipendente dalla posizione x, ad un decremento esponenziale dell'intensità del fascio monocromatico:

$$I_\lambda(x) = I_\lambda(0) \, e^{-K_\lambda x} \quad . \tag{29}$$

E' detta **distanza di estinzione** la $x_e(\lambda) = 1/K_\lambda$, tale che $I_\lambda(x_e) = I_\lambda(0)/e$. Si usa anche definire il **coefficiente di trasmissione** per unità di lunghezza

$$T = I_\lambda(x+1)/I_\lambda(x) \quad , \tag{30}$$

il quale dà la frazione (o la percentuale) di intensità trasmessa alla lunghezza d'onda λ per metro.

La fig. 14 rappresenta schematicamente l'andamento del coefficiente (e della distanza) di estinzione della luce in funzione della lunghezza d'onda (1μ = 10^{-6} m) ovvero del colore in acqua pura e in acque a concentrazione crescente di agenti diffusori. Si noti che un'acqua più torbida, oltre ad essere più opaca alla radiazione globale, favorisce la penetrazione delle lunghezze d'onda maggiori: mentre l'acqua pura presenta il massimo di trasparenza a 0.52 μ (blu-verde), le acque costiere torbide presentano la massima trasparenza verso i 0.6μ (giallo). La fig. 15 rappresenta schematicamente lo spettro dell'energia luminosa alla superficie del mare ed a diverse profondità: l'infrarosso è assorbito quasi del tutto nel primo metro di spessore, il blu-verde difficilmente supera i 200 m di profondità. A profondità sotto i 500 m

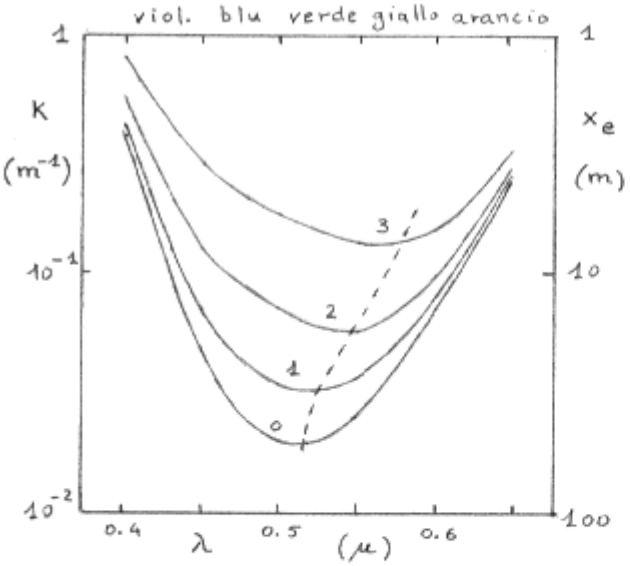


Fig. II.14- Coefficiente e distanza d'estinzione in acqua a torbidità crescente.

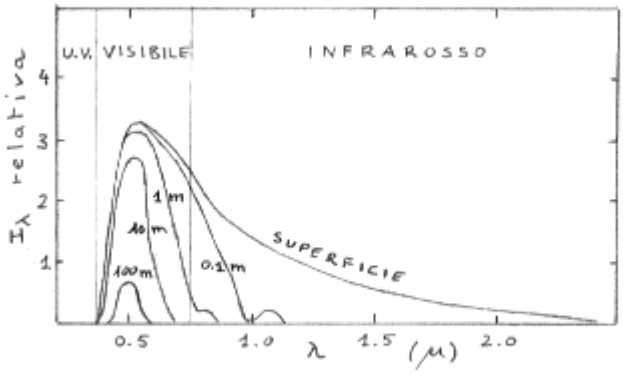


Fig. II.15- Spettro dell'energia luminosa a diverse profondità nel mare.

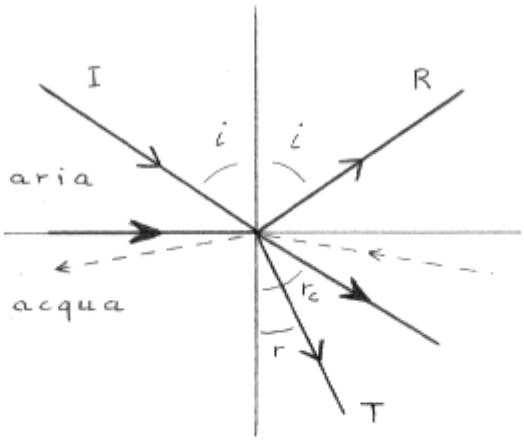


Fig. II.16- Energia luminosa incidente, riflessa, trasmessa.

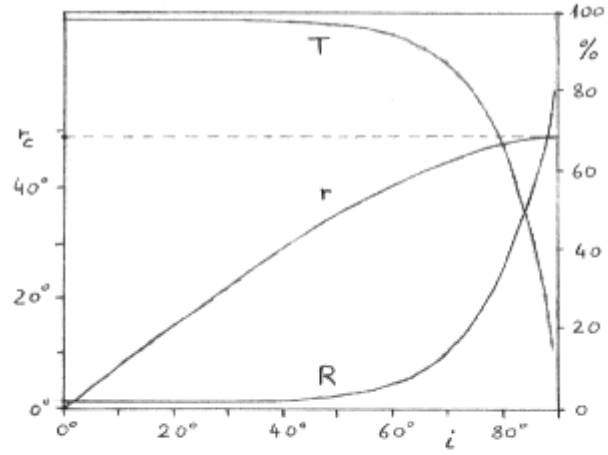


Fig. II.17- Angolo di rifrazione, percentuale di intensità luminosa riflessa e trasmessa in acqua pura.

esiste ancora un sottofondo di energia luminosa, praticamente indipendente dalla radiazione solare, e dovuto alla fotoattività di organismi viventi.

Un raggio luminoso che attraversa una superficie di discontinuità ottica (per esempio la superficie aria-mare) viene parzialmente riflesso e rifratto secondo le note leggi (fig. 16). L'indice di rifrazione dell'acqua rispetto a quello dell'aria preso uguale ad 1 è definito dal rapporto tra i seni degli angoli di incidenza e di rifrazione:

$$\eta = \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} \quad . \qquad (31)$$

Fisso η, che dipende dalle proprietà ottiche del mezzo nei confronti di una data lunghezza d'onda, l'angolo di rifrazione massimo è dato da:

$$\text{sen } r_c = 1/\eta \quad ; \qquad (32)$$

r_c è detto **angolo critico**, oltre il quale si ha una zona d'ombra. Un raggio luminoso proveniente dall'acqua ed incidente sulla superficie con un angolo maggiore di r_c subisce la rifrazione totale e non viene trasmesso nell'aria. Il rapporto tra l'intensità del raggio riflesso R e quello incidente I è dato dalla legge di Fresnel

$$\frac{R}{I} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\text{sen}^2(i-r)}{\text{sen}^2(i+r)} + \frac{\text{tg}^2(i-r)}{\text{tg}^2(i+r)}\right\} \quad , \qquad (33)$$

mentre l'intensità del raggio rifratto trasmessa nell'acqua è

$$T = I - R \quad . \qquad (34)$$

L'andamento dell'angolo di rifrazione (31) e delle percentuali di energia riflessa e trasmessa (33,34) è illustrata in fig. 17 in funzione dell'angolo di incidenza, per un indice di rifrazione η =1.333 (acqua pura a 20°, colore giallo-arancio). Solamente il 2% dell'energia luminosa viene riflessa dalla superficie del mare per angoli di incidenza da 0° a 40°: tale percentuale aumenta molto rapidamente dai 60° in poi, sino al 100 % di riflessione per raggi paralleli alla superficie. La superficie reale del mare, per effetto del moto ondoso, presenta ai raggi solari una molteplicità di piccoli piani riflettenti a di-

versi angoli di incidenza: lo studio fotografico dell'intensità luminosa riflessa è stato sfruttato per la determinazione statistica dell'altezza delle onde in differenti condizioni.

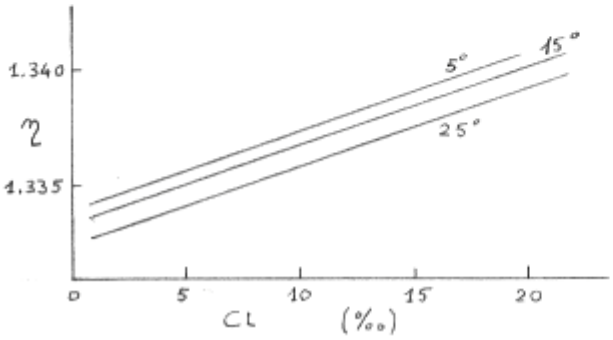


Fig. II.18- Indice di rifrazione in funzione della clorinità a diverse temperature ($\lambda = 0.5893\mu$).

L'indice di rifrazione in acqua pura è una funzione decrescente della lunghezza d'onda e della temperatura. Nell'acqua di mare η cresce linearmente con la clorinità; con riferimento a $\lambda = 0.5893\mu$ (linea D del sodio), è stata determinata sperimentalmente la seguente relazione lineare:

$$\eta(T,Cl) = \eta(T,0) + K(T)\cdot Cl \quad . \quad (35)$$

Il coefficiente angolare K(T) è funzione della temperatura; per T = 25° e Cl in $^{o}/_{oo}$ si ha $\eta(25°,0) = 1.3325$ e $K(25°) = 3.3 \times 10^{-4}$. Il grafico della (35) a diverse temperature è illustrato in fig. 18.

Oggigiorno sono disponibili dei rifrattometri differenziali di buona precisione, che forniscono un mezzo rapido per la determinazione della clorinità e quindi della densità di campioni di acqua di mare; il metodo rifrattometrico si affianca perciò a quello conduttometrico ed a quello chimico per le misure della salinità.

III . IDRODINAMICA

1. Introduzione. Da un punto di vista deterministico la conoscenza dell'oceano è completa quando si è in grado di specificare, per ogni istante e per ogni punto, il valore di tutte le grandezze fisiche, chimiche, termodinamiche che lo concernono. E' chiaro che questo scopo teorico deve essere drasticamente ridimensionato per poter essere almeno in parte raggiunto. Si pone innanzitutto il problema della scelta di quei parametri significativi che servono al particolare problema in esame; una volta che questi sono stati definiti, bisogna cercare, o comunque stabilire delle leggi che regolino i loro rapporti. Tali leggi nel caso nostro sono generalmente quelle della chimica, della termodinamica e dell'idrodinamica; esse si esprimono matematicamente per mezzo di equazioni che coinvolgono le variabili in esame e le loro derivate rispetto al tempo e rispetto allo spazio.

In questo capitolo sono esaminate alcune leggi o equazioni dell'idrodinamica classica necessarie per la comprensione e lo studio dei principali fenomeni dinamici nell'oceano.

2. Campi scalari e vettoriali. Un punto dello spazio ordinario è individuato da tre numeri reali, che possono essere coordinate curvilinee, polari, cartesiane a seconda del sistema di riferimento adottato. Per fissare le idee, consideriamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonale Oxyz (fig. 1): il punto P è rappresentato dalle coordinate $\{x,y,z\} = \{x_i; i=1,3\}$ oppure dal vettore **x** staccato dall'origine. Un campo spaziotemporale è perciò rappresentato da una funzione $\varphi(\mathbf{x},t) = \varphi(x,y,z,t)$; esso è detto **scalare** o **vettoriale** a seconda che la φ sia uno scalare (un numero) o un vettore. Le variazioni di un campo scalare φ nello spazio sono descritte dal suo **gradiente**

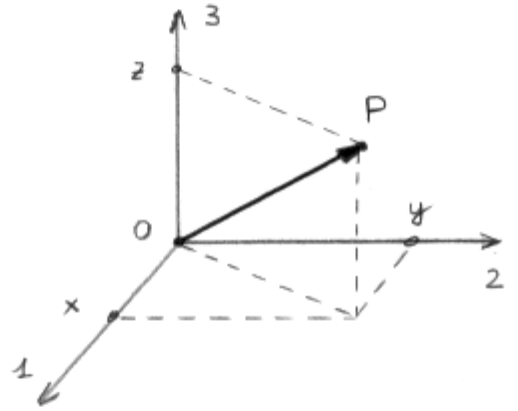


Fig. III.1- Coordinate cartesiane.

$$\text{grad}\,\varphi = \nabla\varphi = \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} ;\ i = 1,3 \right\} = \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right\} \quad ; \qquad (1)$$

il gradiente è un vettore avente per componenti le derivate parziali della φ rispetto a x,y,z. La direzione di $\nabla\varphi$ è quella in cui si ha il massimo incremento della φ, il suo modulo dà la corrispondente variazione di φ per unità di lunghezza. Si può pensare al gradiente come ad un operatore vettoriale con componenti

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \quad . \qquad (2)$$

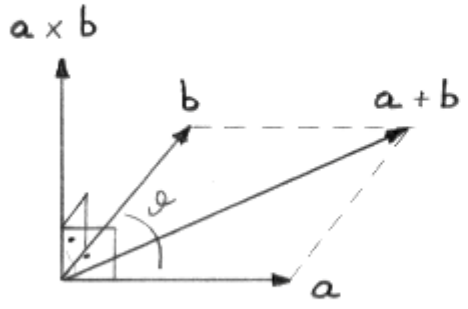


Fig. III.2- Operazioni tra vettori.

Consideriamo due campi vettoriali **a** = $\{a_i\}$, **b** = $\{b_i\}$ (è sottinteso che l'indice i=1,2,3): con essi si può formare il vettore **somma**, il **prodotto scalare** ed il **prodotto vettoriale:**

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_i + b_i\} \ ,$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum a_i b_i \ ,$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \{a_2 b_3 - a_3 b_2 , a_3 b_1 - a_1 b_3 , a_1 b_2 - a_2 b_1\} = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \ . \qquad (3)$$

Somma e prodotto scalare sono commutativi, cioè **a+b = b+a** e **a.b = b.a**, mentre il prodotto vettoriale è anticommutativo: **axb = -bxa**. I rispettivi moduli sono:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = (a^2 + b^2 - 2\, ab \cos\vartheta)^{1/2}$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos\vartheta \ ,$$
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \operatorname{sen}\vartheta \ . \qquad (4)$$

Con riferimento alla fig. 2, **a+b** è la diagonale del parallelogramma formato dai due vettori; la direzione di **axb** è ortogonale al piano da essi individuato, e il verso è tale che **a, b, axb** formano una terna destra.

Si dice **divergenza** di un vettore **a** il prodotto scalare

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \ ; \qquad (5)$$

la divergenza di un vettore è pertanto un numero.

3. Variabili euleriane ed equazioni del moto. L'oceano è considerato, dal punto di vista idrodinamico, come un mezzo continuo caratterizzato da un campo di massa, un campo di velocità, e da un dato campo di forza.

Il campo di massa è rappresentato dalla funzione scalare densità $\rho(\mathbf{x},t)$, di cui si è discusso nel par. II.8. Le variazioni della densità, in genere inferiori allo 0.1 %, sono significative quando si vogliono considerare forze di galleggiamento in seno all'oceano, ma possono essere trascurate ai fini inerziali: in tal caso si può approssimare ρ con un valore costante

$$\rho = \rho_0 \ , \qquad (6)$$

numericamente uguale ad 1 nel sistema cgs.

Il campo di velocità, o di corrente, è rappresentato dal vettore

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \{u_i\} = \{u,v,w\} \ . \qquad (7)$$

Il campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$ delle forze agenti nell'oceano può essere rappresentato sia dalla densità di forza, o forza per unità di volume

$$\varphi(\mathbf{x},t) = \frac{d\mathbf{F}}{dV} \ , \qquad (8)$$

che dal campo di forza specifica, o forza per unità di massa

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t) = \frac{d\mathbf{F}}{dm} = \frac{d\mathbf{F}}{dV}\,\frac{dV}{dm} = \alpha\,\varphi \quad , \tag{9}$$

che ha le dimensioni di un'accelerazione; la forza specifica è uguale al prodotto del volume specifico $\alpha = 1/\rho$ per la densità di forza. Alla formazione del campo di forza contribuiscono forze esterne che sono assegnate come un dato del problema, e forze interne che sono funzione della pressione idrostatica p e del campo di velocità **u**.

Per tale motivo, si considerano come variabili dinamiche caratteristiche la densità ρ , la pressione p e la velocità **u**: in tutto cinque funzioni scalari. Abbiamo quindi bisogno di cinque equazioni in queste variabili; esse sono un'equazione scalare per la conservazione della massa, un'equazione vettoriale (cioè tre equazioni scalari) per la conservazione della quantità di moto, o equazione di Newton, e un'opportuna equazione (scalare) di stato.

Volendo specificare anche i campi di salinità e temperatura, si dovrebbero aggiungere i due scalari $S(\mathbf{x},t)$, $T(\mathbf{x},t)$ e altre due equazioni, esprimenti la conservazione del sale e del calore.

La descrizione delle proprietà dell'oceano mediante funzioni dello spazio e del tempo **x**,t si dice **descrizione di Eulero**, e le variabili $\rho(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ ... sono dette **euleriane**.

4. Variabili lagrangiane e derivata totale. Nel modello idrodinamico classico, un fluido è concepito come un insieme di infiniti elementi o particelle fluide di massa dm, volume dV, paragonabili al punto materiale della meccanica, sempre a contatto con le particelle vicine su tutta la loro superficie. Idealmente si può individuare ogni particella con un'etichetta, e seguirla poi nel suo movimento: questa etichetta può essere, per esempio, la posizione $\mathbf{x}_0$ che la particella occupa all'istante t=0. In questa descrizione, detta **di Lagrange**, una proprietà φ del fluido è pensata come una proprietà delle particelle, e quindi funzione di $\mathbf{x}_0$ e del tempo t; la

$$\varphi_L(\mathbf{x}_0,t) \tag{10}$$

è detta **variabile lagrangiana**. All'istante t, la particella "$\mathbf{x}_0$" si trova nel punto $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0,t)$, e fa prendere al campo euleriano il valore $\varphi(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0,t),t)$. La variazione totale nel tempo del campo $\varphi(\mathbf{x},t)$ deve tener conto della duplice dipendenza da t:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0,t),t) &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t}x_i(\mathbf{x}_0,t) = \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}(\mathbf{x}_0,t)\,.\end{aligned} \tag{11}$$

L'ultimo termine nella (11) è la derivata rispetto al tempo del vettore posizione di "$\mathbf{x}_0$", cioè la velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$. La variazione temporale della variabile euleriana è dunque

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_i u_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi \quad , \tag{12}$$

somma di una variazione locale del campo φ e di un termine, detto **convettivo**, che tiene conto del ricambio di elementi fluidi in quel punto; la (12) prende il nome di **derivata totale**.

Nel seguito descriveremo sempre le proprietà dell'oceano per mezzo di variabili euleriane, cioè con campi $\varphi(\mathbf{x},t)$; bisognerà solamente tener conto della derivata totale (12) per esprimere le variazioni temporali.

5. Equazione di continuità ed equazione del momento. Per cercare una legge che esprima la conservazione della massa nell'oceano, facciamo riferimento, per comodità di ragionamento, ad un cubo elementare di lati dx, dy, dz fisso nello spazio (fig. 3). La massa dm presente nel volume dV al tempo t è uguale a quella che c'era all'istante t=0, dm_0, più la massa entrata nel frattempo. Causa la corrente $\mathbf{u} = \{u,v,w\}$, nel tempo dt, lungo la direzione x, entra dalla faccia 1 la massa $\rho(x)\{\mathbf{u}(x)\,dt\}\,dydz$, ed esce dalla faccia 2 la massa $\rho(x+dx)\{\mathbf{u}(x+dx)\,dt\}dydz$; l'incremento di massa nel volume dV dovuto al trasporto nella direzione x è dato dalla differenza:

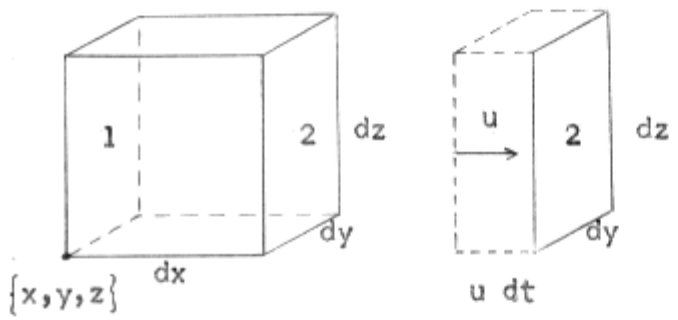


Fig. III.3- Conservazione della massa.

$$\left\{\rho(x)\,u(x) - \rho(x+dx)\,u(x+dx)\right\} dt\,dy\,dz = \left\{-\frac{\partial \rho u}{\partial x}\,dx\right\} dt\,dy\,dz =$$
$$= -\frac{\partial \rho u}{\partial x}\,dt\,dV\,. \qquad (13)$$

Sommando il trasporto di tutte e tre le direzioni, e integrando da 0 a t si ha:

$$dm = dm_0 - dV\int_0^t dt\left\{\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right\} =$$
$$= dm_0 - dV\int_0^t dt\left\{\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i\right\}\,. \qquad (14)$$

Dividendo per dV, usando la definizione (II.14) e derivando rispetto al tempo, si ottiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i = -\rho\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \sum_i u_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\,; \qquad (15)$$

portando a sinistra l'ultimo termine, e ricordando la definizione (12) della derivata totale e (5) della divergenza, si ha:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,,$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\nabla\cdot\mathbf{u}\,. \qquad (16)$$

La (16) è detta **equazione di continuità**; essa esprime la legge di conservazione della massa dicendo che in un punto dell'oceano una variazione percentuale della densità nel tempo è collegata ad una convergenza o ad una divergenza del campo di corrente.

Nell'ipotesi (6) in cui si consideri un oceano di densità costante, l'equazione di continuità (16) si riduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (17)$$

La seconda legge della meccanica di Newton, applicata ad un volumetto fluido di massa unitaria, è

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} \; ; \qquad (18)$$

la (18) stabilisce l'uguaglianza tra la derivata totale del campo di velocità ed il campo della forza specifica (9) nell'oceano. Siccome la velocità è una quantità di moto (o momento lineare) per unità di massa, la (18)è nota con il nome di **equazione del momento.**

L'equazione di continuità (17) e l'equazione del momento (18) permettono di risolvere una vasta classe di problemi dinamici in un oceano omogeneo, una volta che siano specificati il campo di forza **f**, le condizioni iniziali e le condizioni al contorno.

6. Il campo di forza. Il campo di forza agente in un fluido, ed in particolare nell'oceano, è di duplice natura:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V \; ; \qquad (19)$$

si distinguono infatti forze di superficie e forze di volume.

Le **forze di contatto, o forze di superficie** $\mathbf{F}_S$ agiscono su ogni ipotetica superficie di separazione in seno al fluido. Sono forze a corto raggio d'azione, che interessano gli strati ad immediato contatto tra loro; sono dovute ad un passaggio di molecole di diversa energia cinetica attraverso la superficie che le divide. Si assume che la forza di superficie sia proporzionale all'area sulla quale agisce: i coefficienti di proporzionalità hanno le dimensioni di una pressione.

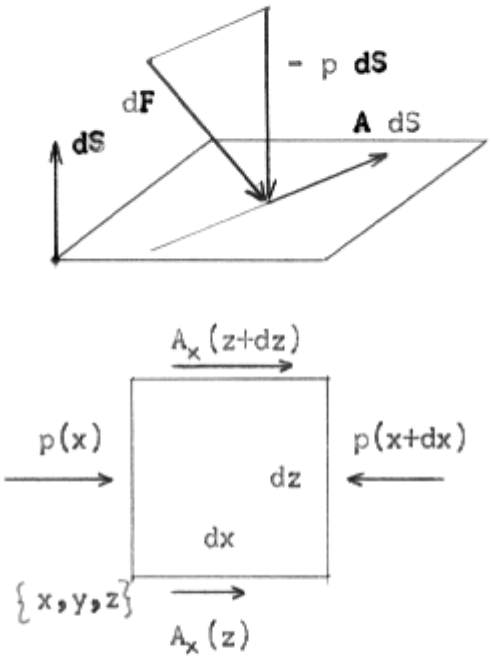


Fig. III.4- forze di contatto.

Prendiamo in esame una superficie elementare individuata dal vettore **dS** ad essa perpendicolare e di modulo pari alla sua area dS (fig. 4). La forza di contatto $d\mathbf{F}_S$ è in genere inclinata rispetto a **dS**, per cui possiamo distinguere una componente normale ed una componente parallela alla superficie stessa:

$$d\mathbf{F}_S = -\, p\, \mathbf{dS} + \mathbf{A}\, dS \; . \qquad (20)$$

Il coefficiente di proporzionalità della componente normale è la pressione p; la componente **A** dS parallela alla superficie è una forza di attrito, che si considera nulla nel caso di un fluido ideale. E' la forza di attrito che

nell'oceano trasmette il moto del vento alla superficie, e da questa agli strati sottostanti, e che in assenza di forze esterne dissipa l'energia delle correnti rallentandole.

La forza di contatto totale che agisce su di un cubo fluido elementare si ottiene sommando le forze agenti su ciascuna faccia; la componente x di tale forza è (fig. 4):

$$\begin{aligned} dF_{s_x} &= \{p(x) - p(x+dx)\}\, dy\, dz + \{A_x(z+dz) - A_x(z)\}\, dx\, dy = \\ &= \left\{-\frac{\partial p}{\partial x}\, dx\right\} dy\, dz + \left\{\frac{\partial A_x}{\partial z}\, dz\right\} dx\, dy = \\ &= \left\{-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\right\} dV \,. \end{aligned} \tag{21}$$

Si è trascurato nella (21) l'attrito che agisce sulle facce laterali dx dz. Dalla (9) e dalla (21) si ricava la componente x della forza di superficie specifica:

$$f_{s_x} = \frac{1}{\rho}\frac{dF_{s_x}}{dV} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_x}{\partial z} \;; \tag{22}$$

Il campo vettoriale della forza specifica di contatto si ottiene sommando alla (22) le analoghe componenti secondo y e z:

$$f_s = \left\{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_i}{\partial z}\right\} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \;; \tag{23}$$

il primo termine a destra è proporzionale al gradiente della pressione, il secondo, che rappresenta la forza di attrito, dipende principalmente dal gradiente verticale di **A**.

Le **forze di volume** $\mathbf{F}_v$, che assieme alle forze di contatto formano il campo totale di forza (19), hanno un lungo raggio d'azione; esse sono le forze gravitazionali, e quelle forze fittizie originate dal fatto che la terra, ruotando, non è un sistema di riferimento inerziale. Il campo totale della forza specifica di volume, cioè la forza di volume totale che agisce su di un elemento di massa unitaria nell'oceano, è:

$$\begin{aligned} f_v &= \{\gamma + f_m\} + \{a + C\} = \\ &= g + C + f_m \;; \end{aligned} \tag{24}$$

γ ed $\mathbf{f}_m$ sono rispettivamente le accelerazioni gravitazionali della terra e degli altri astri (forza di marea), **a** e **C** sono l'accelerazione centrifuga e l'accelerazione di Coriolis, dovute al fatto che la terra ruota attorno al suo asse.

L'accelerazione gravitazionale è data dalla legge di Newton

$$\gamma = G\,\frac{M}{(r_0+z)^2} \;, \tag{25}$$

ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza del punto P a quota -z dal centro della terra; $G = 6.664 \times 10^{-8}\ g^{-1}\ cm^3\ sec^{-2}$ è la costante di gravitazione universale, $M \simeq 5.983 \times 10^{27}$ g è la massa della terra (con esclusione del guscio esterno a P), $r_0 = 6.371 \times 10^8$ cm è il raggio medio terrestre. In funzione di tali valori, si ha $\gamma = 982.3$ cm sec^{-2}.

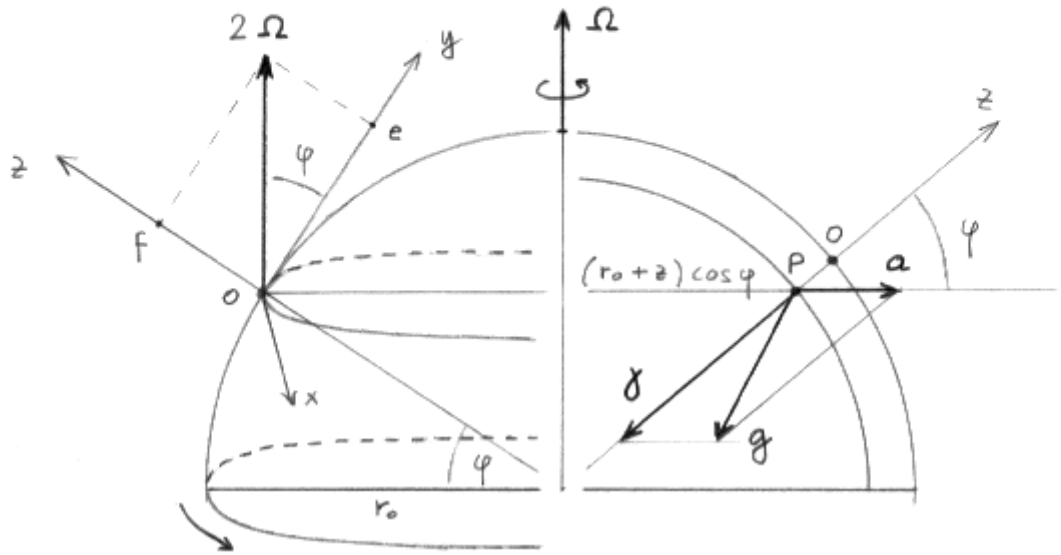


Fig. III.5- Sistema locale di coordinate e campo di gravità.

L'accelerazione centrifuga, o forza centrifuga specifica, è data dal prodotto del quadrato della velocità angolare della terra per la distanza del punto P dall'asse di rotazione, ed è quindi funzione della latitudine φ :

$$a = \Omega^2 (r_o + z) \cos\varphi ; \qquad (26)$$

la direzione è radiale, verso l'esterno. Con $\Omega = 7.292 \times 10^{-5}$ sec^{-1} e per $z = 0$ si ha che $a = 3.388 \cos\varphi$ cm sec^{-2} .

L' accelerazione gravitazionale γ e l'accelerazione centrifuga **a** non sono sperimentalmente distinguibili: esse si sommano vettorialmente per dare l'**accelerazione di gravità** terrestre (fig. 5)

$$\mathbf{g} = \gamma + \mathbf{a} . \qquad (27)$$

La direzione di **g**, che definisce la verticale, è inclinata rispetto a γ per meno di 0.1°; il modulo dell'accelerazione di gravità è dato da

$$g = \{\gamma^2 + a^2 - 2\gamma a \cos\varphi\}^{1/2}. \qquad (28)$$

Combinando la (25) e la (26) e approssimando, si ottiene che, al livello del mare,

$$g = g_{45} \{1 - 0.00176 \cos 2\varphi\} \quad ; \qquad (29)$$

in funzione della gravità a 45° di latitudine $g_{45} = 980.6$ cm sec^{-2} , la (29) dà $g = 978.9$ all'equatore, e $g = 982.3$ ai poli.

Il campo stazionario di gravità terrestre viene periodicamente alterato dal campo gravitazionale della luna e del sole, che assieme danno la forza specifica $\mathbf{f}_m$ che causa le maree; per la sua importanza, la forza di marea è trattata a parte nel cap. VI.

La legge del moto di Newton, ed in particolare l'equazione del momento (18), è valida, così come sta scritta, in un sistema di riferimento inerziale, cioè solidale con le cosiddette stelle fisse, o in moto rettilineo uniforme rispetto ad esse. Volendo adottare invece un sistema di riferimento

Oxyz solidale con la terra, bisogna tener conto del fatto che essa è animata da un moto di rotazione, individuato in un sistema inerziale dal vettore $\boldsymbol{\Omega}$ parallelo all'asse di rotazione, e di modulo Ω = (angolo giro)/(giorno sidereo) = $2\pi/23.934^h = 7.292 \times 10^{-5}\ sec^{-1}$. Un punto fisso nel sistema inerziale ha coordinate variabili nel tempo nel sistema terrestre, e viceversa; si può dimostrare (ad es. Goldstein 1964) che tra le derivate temporali nei due sistemi di riferimento esiste la seguente relazione:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{inerziale} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{terra} + \boldsymbol{\Omega} \times \quad . \tag{30}$$

Per poter applicare la (18) nel sistema di riferimento terrestre bisogna pertanto applicare la (30); ciò comporta, fatti i conti, la presenza accanto alla forza specifica reale di altri due termini, che vengono interpretati come forze fittizie: uno è la forza centrifuga **a** (26), il secondo è la forza di Coriolis, che per unità di massa è

$$\mathbf{C} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{u} \times 2\boldsymbol{\Omega} \quad . \tag{31}$$

Per lo studio di movimenti in piccola scala si adotta in oceanografia un sistema di coordinate cartesiane Oxyz ortogonali con l'asse x positivo ad est, l'asse y positivo a nord e l'asse z positivo in alto. La superficie del mare è approssimata localmente dal piano x,y , perpendicolare alla verticale **g** (fig. 5). In questo sistema, ricordando la definizione (3) del prodotto vettoriale, le coordinate di (27) e (31) sono le seguenti:

$$\mathbf{g} = \{0,0,-g\} \ ; \tag{32}$$

$$2\boldsymbol{\Omega} = \{0, 2\Omega\cos\varphi, 2\Omega\,\mathrm{sen}\varphi\} = \{0,e,f\} \ ; \tag{33}$$

$$\mathbf{C} = \det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ u & v & w \\ 0 & e & f \end{vmatrix} = \{fv-ew,\ -fu,\ eu\} \quad . \tag{34}$$

Il doppio della componente verticale del vettore di rotazione terrestre $\boldsymbol{\Omega}$, indicato con $f = 2\Omega\,\mathrm{sen}\,\varphi$, dato il suo uso frequente in oceanografia, prende il nome di **parametro di Coriolis.**

La posizione reciproca dei vettori **u**, $\boldsymbol{\Omega}$, **C** coinvolti dalla definizione (31) è illustrata dalla fig. 6 (cfr. fig. 2): essi formano, nell'ordine, una terna destra. L'accelerazione di Coriolis è perpendicolare tanto ad $\boldsymbol{\Omega}$, cioè all'asse terrestre, quanto alla velocità **u**; il suo modulo è, in base alla (34) e alla (4) :

$$C = \left\{f^2(u^2+v^2)+e^2(u^2+w^2)-2efvw\right\}^{1/2} = 2\Omega\left\{u^2+v^2+w^2\right\}^{1/2}\mathrm{sen}\,\vartheta . \tag{35}$$

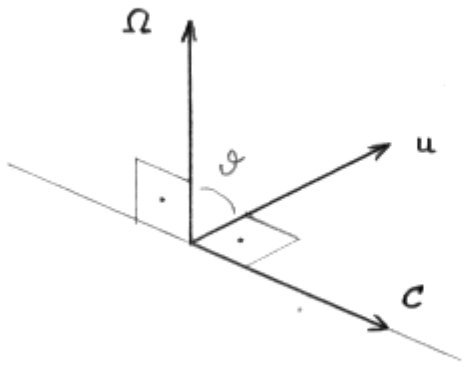


Fig. III.6- Forza di Coriolis.

La forza di Coriolis agisce solamente su particelle in moto relativamente alla terra: C=0 se **u**=0. Essendo inoltre **C** diretta normalmente alla velocità, è una forza che non fa lavoro:

essa non cambia quindi l'intensità ma solo la direzione della corrente.

Riassumendo i risultati sin qui ottenuti, il campo totale della forza specifica nell'oceano è dato da (23) più (24):

$$f = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial z} + g + C + f_m \; ; \tag{36}$$

le forze (per unità di massa) presenti nella (36) sono, nell'ordine, il gradiente di pressione, l'attrito, la gravità terrestre, la forza di Coriolis e la forza astronomica di marea.

7. Le equazioni dell'idrodinamica. Le equazioni che descrivono i movimenti dell'oceano, vale a dire l'equazione del momento (18) con la forza (36), l'equazione di continuità (17) con l'equazione di stato (6) sono le seguenti:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial z} - 2\,\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u} + g + f_m \; , \tag{37}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \; , \tag{38}$$

$$\rho = \rho_0 \tag{39}$$

Le equazioni sono in pratica quattro (una, vettoriale, del momento (37) ed una, scalare, di continuità (38)), nelle quattro variabili $u_i(\mathbf{x},t)$, $p(\mathbf{x},t)$; lo sforzo **A** (ha le dimensioni della pressione) è una funzione, da definire, della velocità. La derivata d/dt è la derivata totale (12).

Le (37,38) sono valide in un qualsiasi sistema di riferimento terrestre; nel sistema locale Oxyz descritto nel par. 6 (fig. 5), usando (1,34, 32,17), esse si scrivono, per componenti:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial A_x}{\partial z} + f v - e w + f_{m_x} \; , \tag{40}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial A_y}{\partial z} - f u + f_{m_y} \; , \tag{41}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial A_z}{\partial z} + e u - g + f_{m_z} \; , \tag{42}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \; . \tag{43}$$

Nello studio delle correnti marine, dove in genere la velocità verticale è piccola rispetto alle componenti orizzontali

$$w \ll u \sim v \; , \tag{44}$$

essendo $f \sim e$ (33) alle medie latitudini, si usa trascurare nella (40) il termine $-ew$. Inoltre si constata che, nella (42), i termini accelerazione verticale, forza specifica di attrito, accelerazione di Coriolis e accelerazione verticale di marea sono circa mille volte più piccoli del gradiente verticale della pressione e dell'accelerazione di gravità; come conseguenza, la (42) è ben approssimata dall'**equazione idrostatica** (47).

Tenendo quindi conto delle approssimazioni introdotte, le equazioni (40,41,42) si semplificano nel modo seguente:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial A_x}{\partial z} + fv + f_{m_x} \quad , \tag{45}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial A_y}{\partial z} - fu + f_{m_y} \quad , \tag{46}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g \quad . \tag{47}$$

Queste equazioni sono utilizzate nei capitoli seguenti per ricavare, in casi semplificati, delle soluzioni particolari, cioè dei particolari campi di corrente che si individuano nell'oceano.

IV . CORRENTI

1. Introduzione. In questo capitolo sfruttiamo le equazioni del moto ricavate nel par. III.7 per descrivere dei particolari tipi di corrente che si incontrano nell'oceano come caso limite di una situazione in generale più complessa. Con il termine "corrente" intendiamo qui il campo orizzontale di velocità $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$, che è determinato, assieme al campo di pressione $p(\mathbf{x},t)$ dalle equazioni (III.45,46,47). Tralasciando la forza di marea che per ora non ci interessa, indicando per semplicità ρ_0 con ρ, le suddette equazioni del momento si scrivono, in forma vettoriale:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{q}\cdot\nabla)\mathbf{q} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{C} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} . \qquad (1)$$

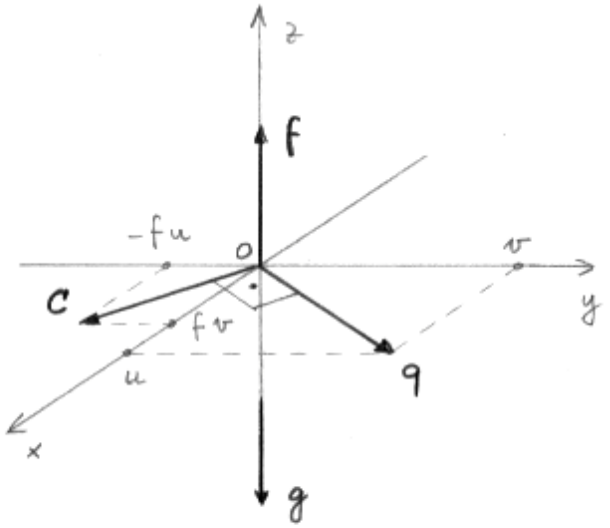


Fig. IV.1- Accelerazione di Coriolis.

Nel solito sistema locale di coordinate Oxyz (fig. III.5), con l'asse z verticale e positivo verso lo zenith, ed il piano x,y coincidente con la superficie media dell'oceano, le componenti dei vettori che compaiono nella (1) sono:

$\mathbf{q} = \{u,v\}$ corrente,

$\mathbf{f} = \{0,0,f\}$ comp. verticale di $2\boldsymbol{\Omega}$,

$f = 2\Omega \operatorname{sen}\varphi$ parametro di Coriolis,

$\mathbf{C} = \mathbf{q} \times \mathbf{f} = \{fv,-fu\}$ acc. di ",

$\mathbf{A} = \{A_x,A_y\}$ pressione d'attrito,

$\nabla = \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ gradiente orizzontale.

Data l'assenza della componente orizzontale del vettore di rotazione terrestre $\boldsymbol{\Omega}$, si noti che gli assi x,y possono essere orientati a piacere nel loro piano, mantenendo naturalmente la loro perpendicolarità. La fig. 1 mostra la relazione tra $\mathbf{q}$, $\mathbf{f}$ e l'accelerazione orizzontale di Coriolis $\mathbf{C}$, che formano nell'ordine una terna destra nell'emisfero nord. Il parametro f di Coriolis è funzione della latitudine; esso cambia segno passando attraverso l'equatore (f=0) nell'emisfero sud: in tale emisfero $\mathbf{C}$ è diretto nel senso opposto a quello indicato nella figura. Da tale fatto si deduce la seguente regola, nota anche con il nome di "legge di Ferrel": la traiettoria di un corpo in movimento sulla superficie terrestre viene piegata verso destra nell'emisfero nord, verso sinistra nell'emisfero sud. A 45° di latitudine $f = 1.031 \times 10^{-4}\ \mathrm{sec}^{-1}$; per una velocità $q = 10$ cm/sec, si ha dunque $C = 0.001\ \mathrm{cm\ sec}^{-2}$.

I diversi termini presenti nell'equazione del momento (1) non sono tutti, in generale, dello stesso ordine di grandezza; può capitare in particolare che uno o più di essi si possano trascurare perchè numericamente irrilevanti. Le semplificazioni così introdotte permettono di studiare un certo aspetto del problema generale, mettendo in evidenza particolari tipi di moto. La prima semplificazione che introduciamo è quella di considerare un oceano ideale, cioè privo di attrito interno ($\mathbf{A} = 0$): questo caso è abbastanza ben approssimato negli strati distanti dalla superficie, dal fondo e dalle rive. I tipi di moto trattati nei prossimi paragrafi sono classificati per comodità nella tabella 1: sono indicati i termini trascurati, con riferimento all'equazione (1), e viceversa le forze in gioco.

M O T O	**semplificazioni**		**equazione**	**forze in gioco**
geostrofico	$\mathbf{A}=0$	$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = 0$	$\mathbf{C} = \frac{1}{\rho}\nabla p$	Coriolis, grad p
inerziale	$\mathbf{A}=0$	$\nabla p = 0$	$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{C}$	centrifuga, Coriolis
di gradiente	$\mathbf{A}=0$	$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = 0$	$(\mathbf{q}.\nabla)\mathbf{q} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{C}$	centrifuga, grad p, Coriolis
ciclostrofico	$\mathbf{A}=0$	$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = 0;\ \mathbf{C} = 0$	$(\mathbf{q}.\nabla)\mathbf{q} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$	centrifuga, grad p

Tab. IV.1- Tipi di moto in un oceano senza attrito.

2. Corrente geostrofica. Posto nella (1)

$$\mathbf{A} = 0\ , \qquad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = 0 \quad \text{(moto non accelerato)}\ , \tag{2}$$

si ottiene l'equazione del moto cosiddetto **geostrofico**

$$\mathbf{q} \times \mathbf{f} = \frac{1}{\rho}\nabla p \ : \tag{3}$$

in tale moto la forza di Coriolis bilancia la forza originata dal gradiente orizzontale di pressione. La situazione che ne risulta è schematizzata nella fig. 2: l'asse n, normale alle isobare tracciate su una superficie orizzontale nell'oceano, è diretto verso l'alta pressione; la forza di gradiente è diretta in senso inverso. Il vettore **C**, per la (3), è l'opposto di $-\frac{1}{\rho}\nabla p$; per la definizione della forza di Coriolis (fig.1) il vettore velocità orizzontale **q** deve essere diretto 90° in senso antiorario, se $f > 0$, in senso

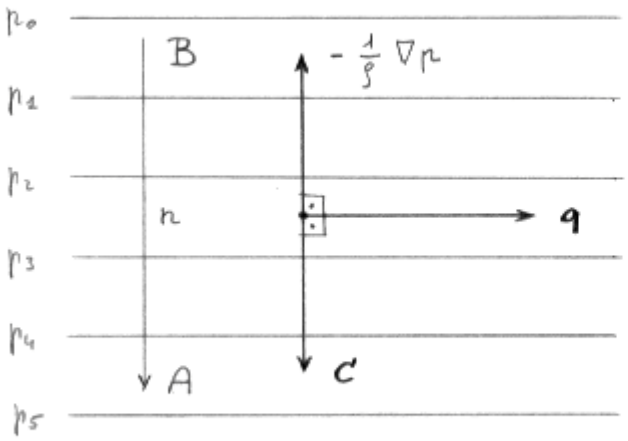


Fig. IV.2- Corrente geostrofica ($f > 0$).

orario, se $f < 0$, a partire da **C**. In quanto ai moduli dei vettori, la (3) dà

$$qf = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} , \tag{4}$$

da cui si ricava l'intensità della **corrente geostrofica**

$$q = \frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial n} . \tag{5}$$

La corrente geostrofica ha quindi intensità proporzionale al gradiente della pressione, inversamente proporzionale alla densità del mare e al parametro di Coriolis; è diretta parallelamente alle isobare su di una superficie orizzontale, e lascia l'alta pressione alla sua destra nell'emisfero nord, alla sua sinistra nell'emisfero sud.

La formula (5) della corrente geostrofica è usata per stimare le correnti oceaniche, nota che sia la distribuzione della densità e quindi del campo di pressione; è usata anche in meteorologia per il calcolo dei venti in quota.

Data l'importanza della corrente geostrofica, consideriamo l'influenza su di essa della forza d'attrito. Adottiamo l'ipotesi di Guldberg-Mohn

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = -kq , \tag{6}$$

cioè immaginiamo un attrito proporzionale alla velocità con un coefficiente costante negativo $-k$ (sec^{-1}). L'equazione (3), con l'aggiunta del termine (6), diventa

$$\mathbf{C} - kq = \frac{1}{\rho}\nabla p , \tag{7}$$

e la situazione delle direzioni cambia come indicato nella fig. 3. Si ha

$$\{C^2 + k^2q^2\}^{1/2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} , \tag{8}$$

$$tg\,\alpha = kq/C , \tag{9}$$

da cui si ricava la velocità della corrente

$$q = \frac{1}{\rho\sqrt{f^2+k^2}}\frac{\partial p}{\partial n} , \tag{10}$$

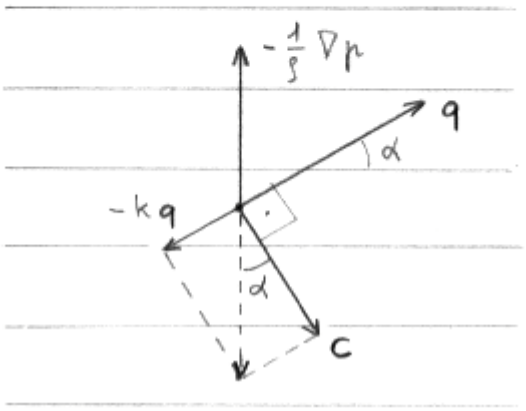


Fig. IV.3- Corrente geostrofica in presenza di attrito.

e l'angolo che essa forma con le isobare verso la bassa pressione

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{k}{f} . \tag{11}$$

Una situazione come quella qui descritta può rappresentare ad esempio una corrente oceanica di fondo, o un vento al suolo.

3. Corrente inerziale. Poniamo nell'equazione orizzontale del momento (1)

$$\mathbf{A} = 0 , \qquad \nabla p = 0 ; \tag{12}$$

rimane la sola accelerazione di Coriolis a definire il **moto inerziale:**

$$\frac{dq}{dt} = q \times f . \tag{13}$$

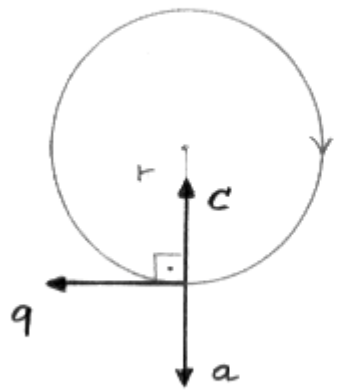


Fig. IV.4- Corrente inerziale nell'emisfero nord ($f > 0$).

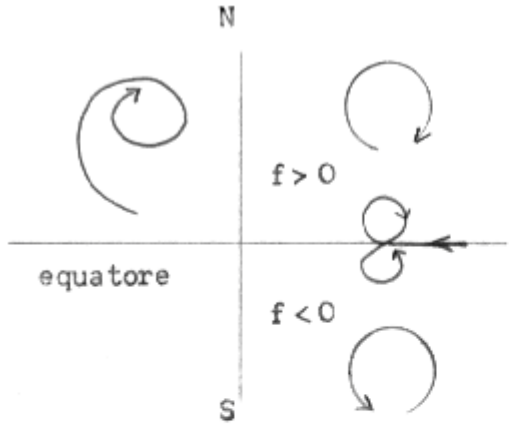


Fig. IV.5- Correnti inerziali.

Come già detto nel par. III.6, la forza di Coriolis altera solo la direzione e non l'intensità della velocità. La situazione d'equilibrio inerziale è rappresentata per $f > 0$ in fig. 4: il moto è circolare, uniforme, di raggio r e velocità $q = \omega r$, ω essendo la velocità angolare. L'accelerazione centrifuga **a** di modulo $a = \omega^2 r = q\omega$ bilancia la accelerazione di Coriolis di modulo $C = qf$. Il raggio ed il periodo di rotazione della corrente inerziale di velocità q sono perciò:

$$r = q/f \ , \tag{14}$$

$$T = \frac{2\pi}{f} = \frac{\pi}{\Omega \operatorname{sen}\varphi} \cong \frac{12^h}{\operatorname{sen}\varphi} \ . \tag{15}$$

Il raggio di curvatura del circolo inerziale decresce con la latitudine, come si osserva in effetti nelle correnti d'inerzia sovrapposte a correnti di deriva. Il verso di rotazione è orario nell'emisfero nord, antiorario nell'emisfero sud. Il periodo T è pari a mezzo giorno sidereo (un po' meno di 12 ore) diviso il seno della latitudine : esso è minimo al polo e infinito all'equatore, ed è uguale a metà del cosiddetto **giorno pendolare.**

Per fare un esempio, alla latitudine $\varphi = 45°$ $f = 1.031 \times 10^{-4} \mathrm{sec}^{-1}$ e $T = 17$ ore; per una corrente inerziale di velocità $q = 10$ cm/sec si ha un raggio di circa 1 km.

4. Corrente di gradiente. Poniamo nell'equazione (1)

$$\mathbf{A} = 0 \ , \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = 0 \quad \text{(moto stazionario)} \ ; \tag{16}$$

l'accelerazione convettiva bilancia il gradiente di pressione e l'accelerazione di Coriolis:

$$(\mathbf{q}\cdot\nabla)\mathbf{q} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{q}\times\mathbf{f} \ . \tag{17}$$

Il moto che ne risulta è detto **di gradiente.** Limitiamoci a considerare, per semplicità, un moto circolare: si distinguono due casi, a seconda che il moto avvenga attorno ad un nucleo di alta pressione, o **anticiclone**, o attorno un nucleo di bassa pressione, detto **ciclone.**

Le forze specifiche in gioco sono l'accelerazione centrifuga $a = q^2/r$, che deriva dal termine convettivo nella (17), il gradiente di pressione di modulo $\rho^{-1}\partial p/\partial r$ e l'accelerazione di Coriolis $C = fq$. Nell'emisfero nord, dove $f > 0$, si ha (fig. 6), rispettivamente nel caso anticiclonico e ciclonico:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = fq \mp \frac{q^2}{r} \ . \tag{18}$$

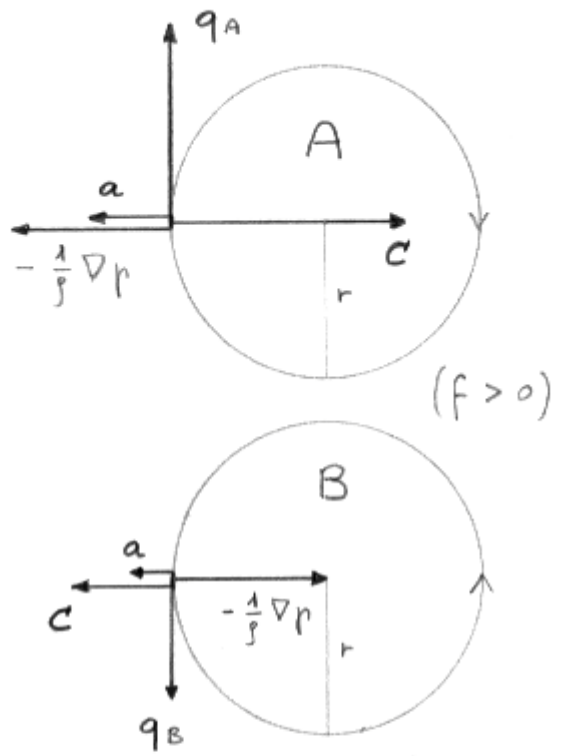


Fig. IV.6- Correnti di gradiente (emisfero nord).

La (18) è un'equazione di secondo grado in q, le cui radici positive, con la condizione che q=0 per $\nabla p=0$, danno la velocità di gradiente q_A, q_B nei due casi:

$$q_{AB} = \pm \frac{fr}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{fr}{2}\right)^2 \mp \frac{r}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}} \qquad (19)$$

Dalle considerazioni fatte, segue che C, e quindi q, è maggiore, a parità di gradiente di pressione, nel caso anticiclonico. Perciò valgono per le correnti oceaniche di gradiente le seguenti proposizioni: "la velocità è maggiore in un anticiclone che in un ciclone di eguale intensità", ovvero "un moto ciclonico richiede un gradiente di pressione più elevato, rispetto ad un moto anticiclonico di eguale velocità".

Nel caso più generale, la corrente non ha una traiettoria circolare, bensì curvata ora da una parte, ora dall'altra: un moto siffatto è anche detto **a meandri**, ed è osservato nelle maggiori correnti oceaniche, per esempio nella corrente del Golfo ed in quella di Kuroshio.

5. Corrente ciclostrofica. L'equazione del **moto ciclostrofico** si ottiene ponendo nella (1):

$$\mathbf{A} = 0 , \quad \mathbf{C} = 0 , \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = 0 ; \qquad (20)$$

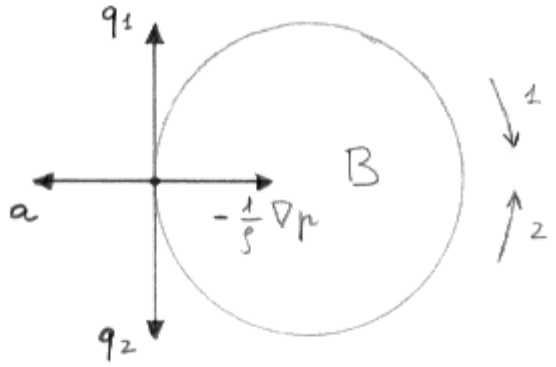


Fig. IV.7- Corrente ciclostrofica.

restano dunque il termine convettivo ed il gradiente di pressione:

$$(\mathbf{q}\cdot\nabla)\,\mathbf{q} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \, . \qquad (21)$$

Anche in questo caso il termine convettivo dà luogo, fatti i conti, ad un'accelerazione centrifuga, che bilancia il gradiente di pressione. E' perciò possibile solamente un moto di tipo ciclonico; nel caso circolare (fig. 7) si ha che

$$\frac{q^2}{r} = \omega^2 r = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \, . \qquad (22)$$

La velocità è elevata, tanto che l'accelerazione di Coriolis è trascurabile in confronto all'accelerazione centrifuga:

$$fq \ll \frac{q^2}{r} , \qquad f \ll \frac{q}{r} = \omega , \qquad (23)$$

ovvero la velocità angolare ω è molto maggiore del parametro di Coriolis. Il senso di rotazione è stabilito dalle condizioni iniziali di innesco del moto ciclostrofico; esempi in natura sono i moti vorticosi in genere, cioè i gorghi

nell'oceano, le trombe d'aria, i tornado ecc. nell'atmosfera.

6. Decadimento della corrente per effetto dell'attrito. Si è visto nel par. 2 che una forza lineare d'attrito fa piegare la corrente geostrofica (e anche una corrente di gradiente) verso la bassa pressione. Dimostriamo ora che lo stesso attrito causa un decadimento esponenziale della velocità.

Consideriamo quindi l'equazione generale (1) con la forza specifica di attrito (6), trascurando, per semplificare il discorso, il gradiente di pressione:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{C} - k\,\mathbf{q} \quad . \tag{24}$$

Moltiplicando scalarmente la (24) per **q**, si ha che $\mathbf{C}.\mathbf{q} = 0$ perchè **C** e **q** sono perpendicolari; rimane

$$\mathbf{q}.\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dq^2}{dt} = -k\,q^2 \quad , \tag{25}$$

che ha per soluzione

$$q^2 \sim e^{-2k\,t} \quad , \tag{26}$$

ovvero (fig. 8) :

$$q(t) = q(0)\,e^{-k\,t} \quad . \tag{27}$$

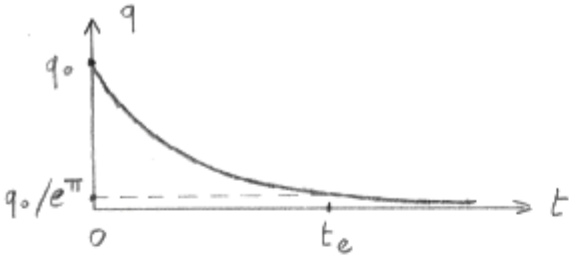


Fig. IV.8- Decadimento della velocità per effetto dell'attrito.

Una misura del tempo di decadimento è data da

$$t_e = \pi/k \quad , \tag{28}$$

istante in cui $q(t_e) = q(0)\,e^{-\pi} \simeq q(0)/23$; in genere per le correnti oceaniche è $k \sim 10^{-5}\ sec^{-1}$, e quindi il tempo di estinzione è dell'ordine di alcuni giorni. La circolazione negli oceani si estinguerebbe perciò rapidamente, se non fosse sostenuta continuamente da fonti esterne di energia, come i venti, la radiazione solare e il campo di attrazione lunisolare.

7. Correnti di deriva. Per trattare questo argomento è necessaria la presenza nell'equazione generale (1) della forza di attrito, poichè è questa che permette al vento di trascinare la superficie del mare e quindi gli strati via via più profondi.

Consideriamo una pressione orizzontale costante $\mathbf{A}_0$ del vento sulla superficie z=0; passata la fase transitoria, il campo stazionario di velocità che si è instaurato nell'oceano per effetto del vento è descritto dalla (1) ove si pone $d\mathbf{q}/dt = 0$ e $\nabla p = 0$:

$$\mathbf{q} \times \mathbf{f} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \quad . \tag{29}$$

Per poter procedere alla soluzione dell'equazione (29), bisogna definire la pressione d'attrito **A**; facciamo l'ipotesi che essa sia proporzionale al gradiente verticale di velocità, cioè poniamo

$$\mathbf{A} = \mu\,\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} \quad , \tag{30}$$

dove μ è il coefficiente di **viscosità**. Inserendo la (30) nella (29) e passando alle componenti, si ottengono le equazioni

$$f u = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad ,$$

$$-f v = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad , \qquad (31)$$

con $\nu = \mu/\rho$, coefficiente di **viscosità cinematica.** La teoria qui esposta è dovuta a Ekman, che ha trovato per le (31) le soluzioni

$$u(z) = q_o \, e^{\pi z/d} \cos(\pi/4 + \pi z/d) \quad ,$$

$$v(z) = q_o \, e^{\pi z/d} \operatorname{sen}(\pi/4 + \pi z/d) \quad ; \qquad (32)$$

le (32) danno le componenti della velocità **q** in funzione della profondità $-z$ e della **profondità di Ekman:**

$$d = \pi \sqrt{2\nu/f} \quad . \qquad (33)$$

La velocità superficiale $\mathbf{q}_o$ è proporzionale alla velocità del vento, e perciò ad $\mathbf{A}_o$, ed è diretta $\simeq$ 45° a destra (nell'emisfero nord) rispetto alla direzione in cui esso spira. Secondo le (32), la velocità decresce esponenzialmente con la profondità:

$$q(z) = q_o \, e^{\pi z/d} = q_o \, e^{\sqrt{f/2\nu}\, z} ; \qquad (34)$$

alla profondità di Ekman $z = -d$ si ha $q(-d) \simeq q_o/23$. La direzione della corrente ruota con la profondità, in senso orario se $f > 0$: l'estremità di **q** descrive la spirale rappresentata in fig.9, che prende il nome di **spirale di Ekman.** In particolare, la direzione di **q**(-d) è opposta a quella di $\mathbf{q}_o$. Integrando **q** dal fondo alla superficie, si ottiene che la direzione media del trasporto **T** è diretta 90° a destra (emisfero nord) rispetto al vento.

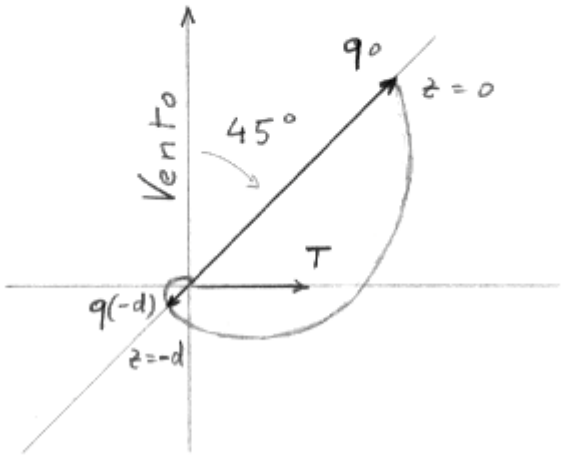


Fig. IV.9- Spirale di Ekman.

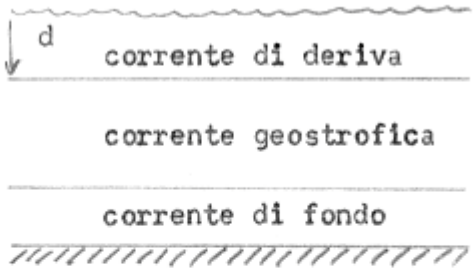


Fig. IV.10- Sistema elementare di correnti.

La corrente (32) fornita dalla teoria di Ekman è detta **corrente di deriva** pura. Essa interessa l'oceano per una profondità d, funzione della viscosità e della latitudine (33), usualmente dell'ordine delle centinaia di metri. Al di sotto di tale profondità l'effetto del vento è trascurabile: la corrente è ben approssimata dalla corrente geostrofica, sino allo strato di fondo dove torna a farsi sentire l'attrito. La fig. 10 illustra questa situazione schematica delle correnti oceaniche.

La circolazione dell'oceano è naturalmente più complessa di quanto gli schemi sin qui esposti potrebbero far credere, in quanto le diverse forze non agiscono mai separatamente come nelle semplificazioni teoriche, e la teoria stessa non è che un modello della realtà. L'utilità dei modelli fisico-matematici consiste nella possibilità che essi danno sia di mettere in evidenza determinati rapporti di causa ed effetto, sia di acquisire formule capaci di dare una prima approssimazione della realtà.

V . STORM SURGE E SESSE

1. Le equazioni di storm surge. Nel capitolo sulle correnti sono stati considerati dei particolari campi di velocità con riferimento ad una superficie orizzontale comunque collocata nell'oceano. Vogliamo ora affrontare il problema della dinamica di un bacino da un punto di vista globale; lo scopo è descrivere l'evoluzione della superficie libera e della circolazione media nel regime delle onde lunghe, sotto l'influenza del vento e della pressione atmosferica.

Facciamo dunque riferimento ad un bacino di dimensioni piccole rispetto al raggio terrestre (un lago, un mare adiacente grande al più quanto l'Adriatico o il mare del Nord), la cui profondità sia piccola ($\sim$ 1 km) rispetto alle dimensioni orizzontali ($\sim$ 100 km). La scala del moto che in esso consideriamo è tale che la lunghezza d'onda è dell'ordine delle dimensioni orizzontali del bacino; la velocità della corrente verticale è trascurabile rispetto a quella orizzontale ($\sim$ 10 cm/sec), che a sua volta è molto inferiore alla velocità di propagazione dell'onda ($\sim$ 10 m/sec). Lo scostamento dal livello medio del mare è infine sempre piccolo rispetto alla profondità h. Con tali ipotesi adottiamo il solito sistema di coordinate locale Oxyz (fig. III.5): il piano x,y coincide con la superficie libera del mare in quiete z=0, l'asse z è verticale e positivo verso l'alto. Il fondo del mare è definito da $z = -h(x,y)$, e $z = \eta(x,y,t)$ è l'equazione della superficie in funzione del tempo t: fissi x,y, $\eta(t)$ dà le variazioni del livello del mare in quel luogo. Considerata ai fini inerziali costante la densità ρ dell'acqua, le equazioni del moto sono l'equazione di continuità (III.43), l'equazione idrostatica (III.47) e le equazioni orizzontali del momento (III.45,46).

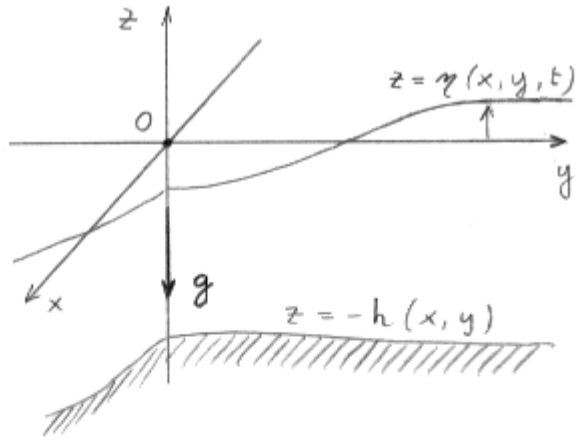


Fig. V.1- Sistema di coordinate.

Trascurando nella derivata totale (III.12) il termine convettivo, che è piccolo nel caso delle onde lunghe, le equazioni sono:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad ; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_x}{\partial z} \quad , \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - fu + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_y}{\partial z} \quad . \tag{4}$$

Queste equazioni forniscono il campo della velocità e della pressione in funzione della pressione d'attrito in tutta la massa d'acqua. Per semplificare

il problema, è conveniente integrarle verticalmente dal fondo alla superficie: in tal modo si conserva un unico campo medio di velocità orizzontale, e si fanno entrare il dislivello, la pressione atmosferica e la pressione d'attrito del vento direttamente nelle equazioni. Dato che, per ipotesi, $\eta \ll h$, confonderemo quando ci farà comodo l'estremo superiore di integrazione $z = \eta(x,y,t)$ con la costante $z = 0$.

Con riferimento all'equazione di continuità (1), si ha:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z}\, dz = w(x,y,\eta,t) - w(x,y,-h,t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}\,, \tag{5}$$

in quanto la velocità verticale è nulla sul fondo, e per definizione è in superficie eguale alla variazione del livello nell'unità di tempo. Inoltre è

$$\int_{-h}^{0} \frac{\partial u}{\partial x}\, dz = \frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{0} u\, dz = \frac{\partial}{\partial x}\, h\, U\,, \tag{6}$$

e analogamente per la componente y; la velocità orizzontale media è definita da

$$U = \frac{1}{h}\int_{-h}^{\eta} u\, dz \quad , \quad V = \frac{1}{h}\int_{-h}^{\eta} v\, dz\,. \tag{7}$$

Per quanto riguarda l'equazione idrostatica (2), integrandola da z alla superficie

$$0 = \int_{z}^{\eta} dz \left\{ \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right\} = p(x,y,\eta,t) - p(x,y,z,t) + \rho g\,(\eta - z) \tag{8}$$

si ottiene l'equazione di Stevino (cfr. II.12)

$$p = p_0 + \rho g\,(\eta - z)\,, \tag{9}$$

che dà la pressione $p(\mathbf{x},t)$ in funzione della pressione atmosferica $p_0(x,y,t)$ e dell'altezza $\eta - z$ della colonna d'acqua sovrastante (g, come ρ, è considerata costante).

Integrando ora l'equazione del momento (3), si ottiene, per la (6):

$$\int_{-h}^{0} \frac{\partial u}{\partial t}\, dz = \frac{\partial}{\partial t}\, h\, U = h\,\frac{\partial U}{\partial t}\,; \tag{10}$$

sostituendo nel termine corrispondente la pressione con la (9):

$$-\int_{-h}^{0} dz\, \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\, p(\mathbf{x},t) = -\int_{-h}^{0} dz \left\{ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\, p_0(x,y,t) + g\,\frac{\partial}{\partial x}\,\eta(x,y,t) \right\} =$$

$$= -\frac{h}{\rho}\,\frac{\partial p_0}{\partial x} - h g\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\,. \tag{11}$$

Il termine di Coriolis dà

$$\int_{-h}^{0} f\, v\, dz = h\, f\, V\,, \tag{12}$$

e il termine di attrito:

$$\frac{1}{\rho}\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial A_x}{\partial z}\, dz = \frac{1}{\rho}\, A_x(x,y,\eta,t) - \frac{1}{\rho}\, A_x(x,y,-h,t)\,. \tag{13}$$

Integrando la componente y (4) dell'equazione del momento si ottengono ri-

sultati analoghi a (11,12,13); in particolare $\mathbf{A}(x,y,\eta,t) = \mathbf{A}(0)$ è la pressione d'attrito che il vento esercita sulla superficie del mare, $\mathbf{A}(x,y,-h,t) = \mathbf{A}(h)$ è la pressione d'attrito che il mare esercita sul fondo. Si usa considerare per la prima una dipendenza quadratica dalla velocità $\mathbf{w}$ del vento, per la seconda una dipendenza lineare dalla velocità media $\mathbf{U} = \{U,V\}$:

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{A}(0) = \gamma\,|\mathbf{w}|\,\mathbf{w}\,, \tag{14}$$

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{A}(h) = h\,k\,\mathbf{U}\;; \tag{15}$$

i coefficienti γ e k sono costanti.

Riunendo i risultati (5,6,10,11,12,13,14,15) si ottengono le equazioni

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{\partial hU}{\partial x} - \frac{\partial hV}{\partial y}\,, \tag{16}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g\frac{\partial\eta}{\partial x} + fV - kU + \frac{1}{h}\gamma\, w\, w_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial x}\,, \tag{17}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -g\frac{\partial\eta}{\partial y} - fU - kV + \frac{1}{h}\gamma\, w\, w_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial y}\;; \tag{18}$$

in forma vettoriale, queste si traducono nelle:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\nabla\cdot h\,\mathbf{U}\,, \tag{19}$$

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} = -g\nabla\eta + \mathbf{C} - k\,\mathbf{U} + \mathbf{F}\,, \tag{20}$$

dove

η	elevazione sul livello del mare a riposo,
$\mathbf{U} = \{U,V\}$	velocità orizzontale media,
$\mathbf{C} = \{fV,-fU\}$	accelerazione di Coriolis,
$\mathbf{F} = \{X,Y\}$	forza specifica aria-mare,
$\nabla = \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$	gradiente orizzontale.

La forza agente è quella che l'aria esercita sulla superficie del mare; essa è dovuta alla forza di trascinamento del vento e al gradiente orizzontale della pressione atmosferica; per unità di massa, in base a (14,11), si è definito:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{h}\gamma\, w\, \mathbf{w} - \frac{1}{\rho}\nabla p_0\;. \tag{21}$$

La (19) e la (20) sono note con il nome di **equazioni di storm surge**, in quanto permettono di studiare l'innalzamento del livello del mare in un bacino (ingorgo, "surge") causato da perturbazioni meteorologiche. Fisicamente, l'equazione del momento (20) descrive il movimento orizzontale di colonne verticali ed omogenee d'acqua, sospinte alla sommità dalla forza dell'aria e trattenute dall'attrito sul fondo; la pendenza della superficie del mare causa una forza gravitazionale di richiamo, e la forza di Coriolis devia il moto sulla destra nell'emisfero nord. L'equazione di continuità (19) stabilisce che ad una convergenza o ad una divergenza locale del trasporto orizzontale h**U** fa seguito un innalzamento o una depressione della superficie del

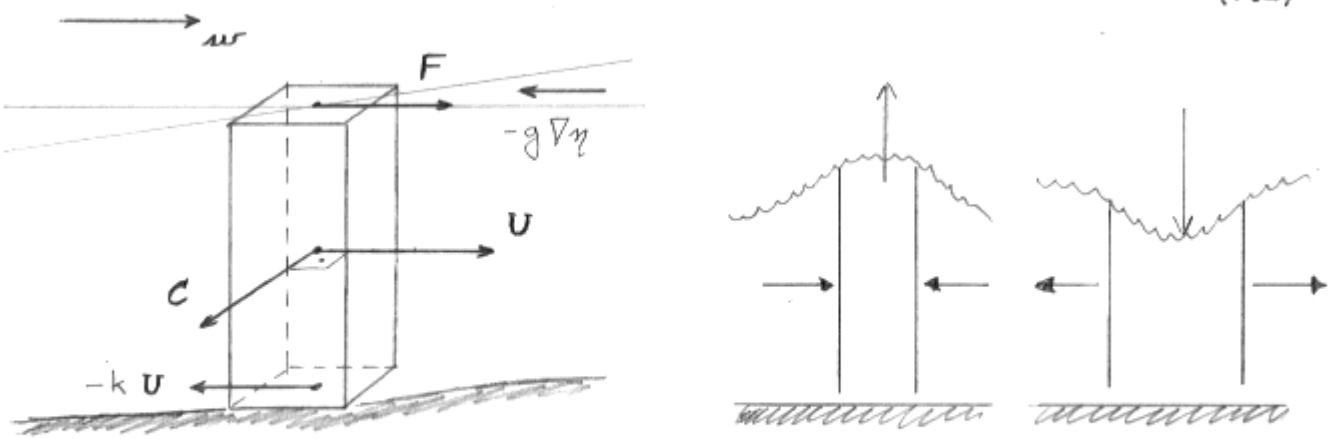


Fig. V.2- Interpretazione fisica delle equazioni di storm surge.

mare nello stesso punto, e viceversa, essendo l'acqua incompressibile per ipotesi (ρ è costante).

Nelle equazioni di storm surge i dati sono $h(x,y)$, $\mathbf{F}(x,y,t)$; le incognite sono il livello $\eta\,(x,y,t)$ e la corrente $\mathbf{U}(x,y,t)$. Per poterle risolvere, bisogna specificare le condizioni iniziali $\eta\,(x,y,0)$, $\mathbf{U}(x,y,0)$ e le condizioni al contorno; lungo la costa si pone uguale a zero la componente perpendicolare della corrente, lungo l'eventuale lato aperto del bacino bisogna specificare una relazione tra η ed $\mathbf{U}$. Le equazioni (19,20) sono **lineari**, vale a dire che se la forza $\mathbf{F}_n$ dà origine ai campi η_n , $\mathbf{U}_n$, allora la forza $\sum a_n \mathbf{F}_n$ dà origine ai campi $\sum a_n \eta_n$, $\sum a_n \mathbf{U}_n$: l'effetto di una combinazione lineare di cause è la combinazione lineare, con gli stessi coefficienti, dei rispettivi effetti.

La soluzione delle equazioni di storm surge nel caso generale di un bacino di forma irregolare e di una forza comunque variabile si può ottenere solamente con l'uso di metodi di calcolo numerico. Nei prossimi paragrafi esamineremo il caso del moto in una sola dimensione, per far vedere l'esistenza in un bacino di oscillazioni libere, o sesse, di periodi ben definiti, e per mettere in evidenza gli effetti del vento sul livello del mare.

2. Sesse. In ogni bacino acqueo si possono innescare, sotto l'azione soprattutto delle forze meteorologiche, delle oscillazioni della superficie libera e del campo di corrente, corrispondenti a onde lunghe stazionarie, i cui periodi sono determinati dalla conformazione delle coste e dalla batimetria. Le oscillazioni libere di un bacino prendono in oceanografia il nome di **sesse.** Matematicamente, le sesse sono le soluzioni caratteristiche delle equazioni di storm surge omogenee, cioè delle (19,20) con $\mathbf{F} = 0$. Per non appesantire il problema con calcoli complicati, ci accontentiamo di esaminarlo in una sola dimensione orizzontale, trascurando la rotazione della terra.

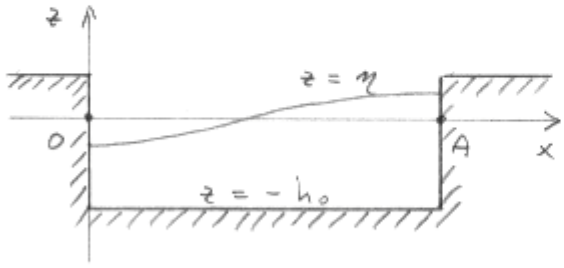


Fig. V.3- Bacino unidimensionale.

Le equazioni del moto in una dimensione si ottengono ponendo nelle (16,17) $\partial/\partial y = 0$, $f = 0$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial h U}{\partial x}, \qquad (22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} - kU + X. \qquad (23)$$

Ponendo la forza esterna $X = 0$ nella (23), e definendo le condizioni al contorno per un bacino chiuso (fig. 3)

$$U(0,t) = U(A,t) = 0 , \tag{24}$$

la soluzione generale del sistema (22,23) è

$$\eta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n , \qquad U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} U_n , \tag{25}$$

cioè la somma di infinite sesse di ordine n :

$$\eta_n(x,t) = \varepsilon_n \cos(\varphi_n x) \cos(\omega_n t)\, e^{-kt/2} , \tag{26}$$

$$U_n(x,t) = \frac{c_0}{h_0} \varepsilon_n \operatorname{sen}(\varphi_n x) \operatorname{sen}(\omega_n t + \delta_n)\, e^{-kt/2} ; \tag{27}$$

le notazioni sono

ε_n	ampiezza,
$c_0 = \sqrt{g h_0}$	velocità dell'onda,
$\varphi_n = n\pi/A$	numero d'onda,
$\omega_n = \sqrt{c_0^2 \varphi_n^2 - (k/2)^2}$	frequenza angolare,
$T_n = 2\pi/\omega_n$	periodo,
$\delta_n = \operatorname{arctg}(k/2\omega_n)$	fase iniziale.

Il fatto che la sessa n (26,27) è una soluzione di (22,23) per X=0 può essere verificato facilmente per sostituzione diretta; la (25) è valida per la linearità delle equazioni del moto. La discretizzazione del numero d'onda e della frequenza angolare φ_n , ω_n , n=1,2... è una conseguenza delle condizioni al contorno (24): sono permesse infatti le sole onde che hanno un nodo per la velocità U in x=0, x=A.

Le (26,27) rappresentano, per ogni n, un'onda stazionaria smorzata: ad ogni istante fissato t, η ed U sono funzioni sinusoidali della distanza x sfasate di $\pi/2$, e in ogni punto x η ed U variano sinusoidalmente nel tempo, sfasate di $\pi/2-\delta_n$. L'attrito produce l'effetto di smorzare esponenzialmente l'ampiezza ε_n dell'onda (fig. 4), di diminuire la velocità angolare ω_n , cioè di allungare il periodo T_n , e di diminuire di δ_n lo sfasamento temporale di $\pi/2$ tra η ed U. La sessa di ordine n presenta, per il livello η , n nodi

$$x = (2k+1)\frac{A}{2n} , \quad k=0,1,..\ n-1 \tag{28}$$

ed n+1 ventri; per la velocità orizzontale media U presenta invece n+1 nodi

$$x = k\frac{A}{n} , \qquad k=0,1,..\ n \tag{29}$$

ed n ventri. La fig. 5 mostra per t=0 il profilo $\eta(x,0)$ della super-

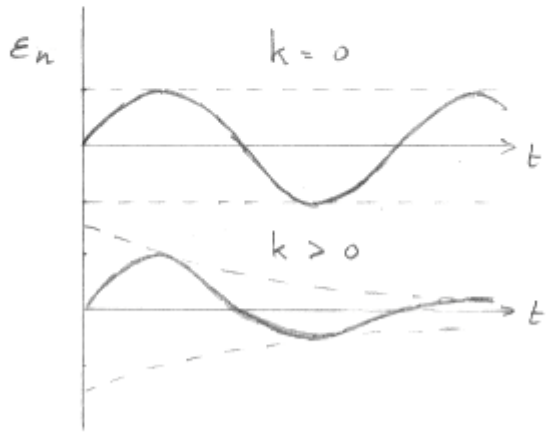


Fig. V.4- Smorzamento delle sesse per effetto dell'attrito.

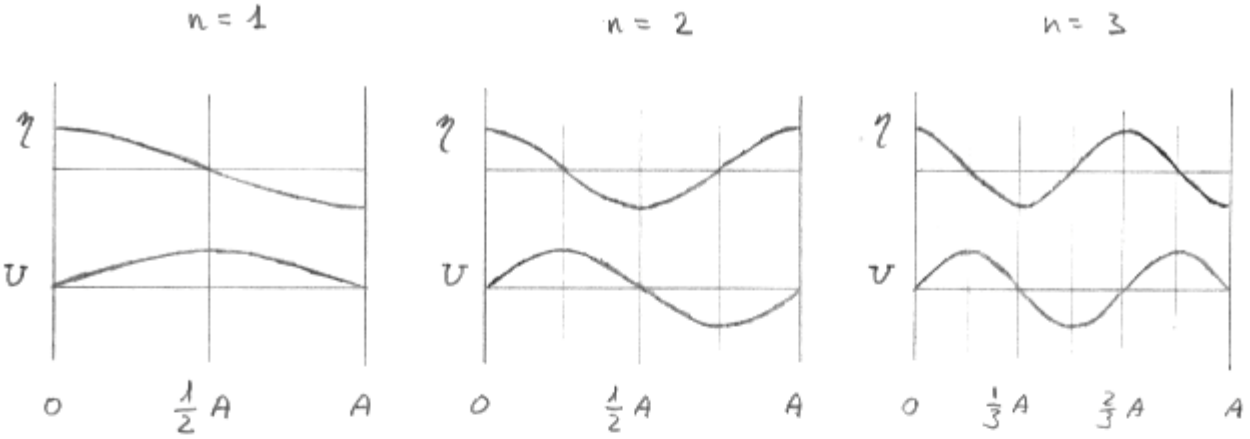


Fig. V.5- Profili longitudinali iniziali delle tre sesse principali.

ficie del mare e quello U(x,0) della corrente per le prime tre sesse (n=1, 2,3). In assenza di attrito (k=0) l'ampiezza dell'onda rimane costante, la fase $\delta_n = 0$, ed i periodi delle sesse sono dati dalla **formula di Merian** :

$$T_n = \frac{1}{n} \frac{2A}{\sqrt{g h_0}} \quad . \tag{30}$$

Le sesse sono, matematicamente, in numero infinito; fisicamente però n ha un limite, oltre il quale le onde non sono più "lunghe", e vengono a cadere le ipotesi su cui si basano le equazioni di storm surge.

Nel caso generale di un mare reale, i periodi delle sesse non sono più dati dalle formule qui esposte, che possono servire solamente in prima approssimazione, ma sono sempre fissi e discreti: ogni bacino ha il suo spettro caratteristico. L'ampiezza di ciascuna sessa dipende dalla causa che la determina, ed è smorzata per effetto dell'attrito; lo smorzamento effettivo è solamente approssimato da quello esponenziale, perchè la definizione (15) è solamente una comoda ipotesi di lavoro, un modello semplificato che solo in certi casi (non tanto rari) traduce bene una realtà ovviamente più complessa.

3. Effetti del vento in un bacino. Limitiamoci ancora a considerare, per semplicità di ragionamento, il caso unidimensionale descritto dalle equazioni di storm surge (22,23); la soluzione completa è del tipo

$$\eta = \eta_0 + \eta_x \quad , \quad U = U_0 + U_x \ , \tag{31}$$

consistente in una sovrapposizione delle sesse η_0, U_0 (25) proprie del bacino più una soluzione η_x, U_x caratteristica della forza agente X. Nel caso di una forza stazionaria, dopo un certo tempo si instaura nel bacino una situazione di equilibrio, anch'essa stazionaria, descritta dalle equazioni (22,23) ove si ponga $\partial/\partial t = 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \ , \tag{32}$$

$$g \frac{\partial \eta}{\partial x} + k U = X \ . \tag{33}$$

Queste hanno per soluzione, per una forza specifica costante $X = X_0$:

$$U_x = 0 \ , \tag{34}$$

$$\eta_x = \frac{1}{g} \int_0^x X \, dx = \frac{X_0}{g} x + \eta(0) \tag{35}$$

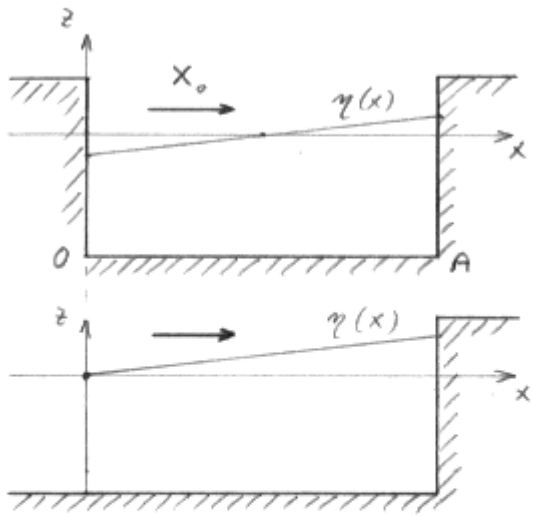


Fig. V.6- Dislivello mantenuto da una forza costante.

Le (34,35) si possono riassumere dicendo che: una forza costante X_o applicata alla superficie del mare la mantiene, all'equilibrio, piana ed inclinata con una pendenza X_o/g. La forza gravitazionale di richiamo è dunque bilanciata dalla forza esterna: il campo di corrente è nullo. La costante $\eta(0)$ nella (35) è uguale a $-AX_o/2g$ se il bacino è chiuso, in modo da conservare il volume totale; si definisce uguale a zero se il bacino è aperto (fig.6). Si noti che l'effetto (35) di una forza costante è indipendente dalla profondità del bacino.

La forza X agente sulla superficie del mare lungo la direzione x può essere dovuta, fisicamente, al vento, al gradiente orizzontale della pressione atmosferica, o ad entrambi questi fattori (21), i cui effetti separati, del tipo descritto da (34,35), si sommano per la linearità delle equazioni.

Esaminiamo in particolare gli effetti del vento. Ad un vento di velocità costante w_o che spira nella direzione x corrisponde, per la (21), una forza specifica

$$X = \frac{\gamma}{h} w_o^2 \qquad (36)$$

applicata alla superficie del mare nella stessa direzione; tale forza è tanto più intensa quanto minore è la profondità del bacino. All'equilibrio, essendo nulla la velocità U, la pendenza della superficie bilancia, per ogni punto x, la forza (36), ed aumenta perciò con essa. Il profilo stazionario si calcola con la (35); nel caso di un fondale a piano inclinato

$$h = -mx + h_o \ , \ m = (h_o - h_A)/A \ , \qquad (37)$$

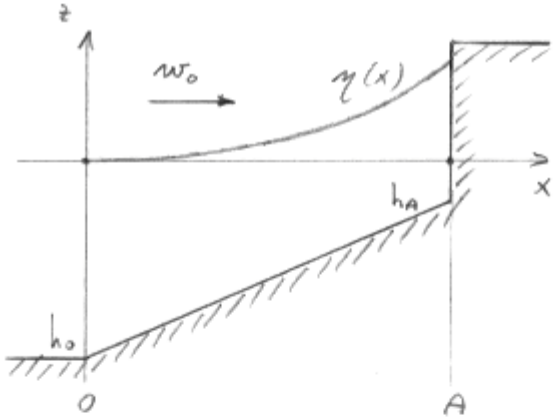


Fig. V.7- Effetto d'acqua bassa.

sostituendo la (37) nella (36) ed integrando, posto $\eta(0) = 0$ per un bacino aperto in x=0, si ottiene

$$\eta(x) = \frac{\gamma}{m\,g} w_o^2 \log \frac{h_o}{h} \ ; \qquad (38)$$

l'effetto di accumulo dell'acqua contro la sponda sottovento del bacino viene esaltata dalla diminuzione del fondale (fig. 7). Questo effetto amplificatore dell'acqua bassa agisce anche dinamicamente nella propagazione delle onde lunghe, quali le sesse e le onde di marea.

Il caso stazionario sin qui esaminato rappresenta un limite teorico, che viene raggiunto dopo un tempo infinito in presenza della forza agente. Se la forza X_o, invece di rimanere costante, varia "lentamente", la superficie del bacino si adegua di volta in volta al nuovo equilibrio; se la variazione è invece "rapida", il bacino risponde con ritardo, cercando di adeguarsi alle nuove condizioni che gli sono imposte. Se la forza X_o viene applicata brusca-

mente, l'impatto iniziale innesca nel bacino le sesse sue proprie, di ampiezza tanto maggiore quanto più rapida è stata la variazione iniziale: la superficie compie delle oscillazioni smorzate, a seconda del coefficiente di attrito k, attorno alla posizione di equilibrio, che raggiunge se lo smorzamento si completa prima che la forza cessi. Contemporaneamente alle oscillazioni della superficie si hanno nella massa d'acqua delle oscillazioni della corrente U.

4. Esempi. Consideriamo a titolo d'esempio un bacino unidimensionale di lunghezza A, aperto in x=0 e chiuso in x=A, di profondità costante h_o (fig. 8). Rappresentiamo con esso una sezione longitudinale del mare Adriatico, ponendo

$$A = 800 \text{ km} , \quad h_o = 200 \text{ m} . \quad (39)$$

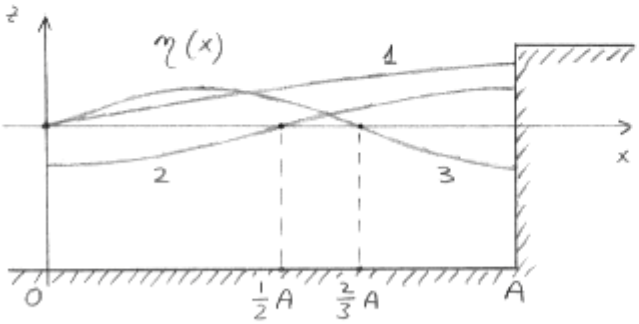


Fig. V.8- Sesse in un bacino aperto.

I periodi caratteristici delle sesse si ottengono applicando la formula di Merian (30) ad un bacino chiuso di lunghezza 2A, ottenuto estendendo il bacino di fig. 8 con la sua immagine speculare per x < 0:

$$T_n = \frac{1}{n} \frac{4\,A}{\sqrt{gh_o}} , \quad c_o = \sqrt{gh_o} = 44.3 \text{ m/sec} , \quad T_{1,2,3..} = 20^h,\ 10^h,\ 5^h.. \quad (40)$$

Il profilo della superficie $\eta(x)$ è rappresentato in fig. 8 per le tre sesse principali; i periodi osservati in Adriatico sono rispettivamente di 21.5, 11.2, 7.1 ore circa. Se l'ampiezza della sessa è $\varepsilon_n = 50$ cm per η_n, si ha in corrispondenza (27) un valore di $\varepsilon_n c_o/h_o = \varepsilon_n\sqrt{g/h_o} = 11$ cm/sec per la velocità U_n, che è molto inferiore alla velocità c_o dell'onda, conformemente alle ipotesi fatte nel par. 1.

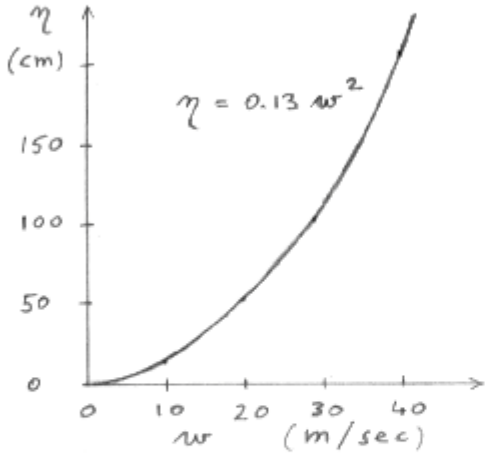


Fig. V.9- Dislivello in x = A in funzione della velocità del vento.

Consideriamo ora gli effetti stazionari di un vento di velocità

$$w_o = 10 \text{ m/sec} = 36 \text{ km/h} . \quad (41)$$

Usando il valore $\gamma = 3.2 \times 10^{-6}$, la (36) dà per (39,41) la forza specifica :

$$X_o = \frac{\gamma}{h_o} w_o^2 = 1.6 \times 10^{-4} \text{cm sec}^{-2} \quad (42)$$

ovvero dine/g ; la superficie d'equilibrio è il piano inclinato (35) con $\eta(0)=0$. Posto g=981 cm sec^{-2}, il dislivello all'estremità sottovento (ad es. Trieste) è

$$\eta_{x_o}(A) = \frac{X_o}{g} A = 13 \text{ cm} . \quad (43)$$

Sostituendo la (36) nella (35) si ottiene il dislivello in x=A direttamente in funzione della velocità del vento; se w è in m/sec, si ha in cm :

$$\eta(A) = \frac{\gamma A}{c_o^2} w^2 = 0.13\, w^2 . \quad (44)$$

La (44) è un arco di parabola, come illustrato dalla fig. 9.

Torniamo ancora una volta all'espressione (21) della forza specifica di origine meteorologica, per chiarire il rapporto tra la forza dovuta al vento e quella dovuta al gradiente della pressione atmosferica. Vento e pressione dell'aria non sono tra loro indipendenti; possiamo immaginare che quando su di un bacino transita un ciclone (area di bassa pressione), di dimensioni grandi rispetto a quelle del bacino stesso, caratterizzato da un gradiente $\partial p_o/\partial x$, il vento che lo accompagna è dell'ordine di grandezza del vento geostrofico w_γ calcolabile con la (IV.5). La forza specifica totale è

$$X = X_w - X_p \quad , \tag{45}$$

$$X_w = \frac{\gamma}{h} w_\gamma^2 = \frac{\gamma}{h} \left\{ \frac{1}{\rho_a f} \frac{\partial p_o}{\partial x} \right\}^2 \quad , \tag{46}$$

$$X_p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial x} \quad ; \tag{47}$$

$\rho_a = 1.3 \times 10^{-3}$ g/cm^3 è la densità dell'aria a 20° al livello del mare. Entrambe le forze X_w, X_p producono nel bacino un effetto di accumulo del tipo (35), indipendentemente dalla loro natura; il rapporto tra le forze è perciò pari al rapporto tra le elevazioni da esse prodotte :

$$\frac{X_w}{X_p} = \frac{\gamma \rho}{h (\rho_a f)^2} \frac{\partial p_o}{\partial x} = 1.89 \frac{1}{h f^2} \frac{\partial p_o}{\partial x} \quad . \tag{48}$$

Per $h = 200$ m e $f = 1.031 \times 10^{-4}$ sec^{-1} (45° di latitudine), si ha

$$\frac{X_w}{X_p} = 0.89 \times 10^4 \frac{\partial p_o}{\partial x} = 0.89 \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} \right)_{\frac{mb}{100\,km}} \quad ; \tag{49}$$

calcolando il gradiente orizzontale della pressione atmosferica (inversamente proporzionale alla distanza tra le isobare al suolo) in millibar/100 km, si ha all'incirca il rapporto tra l'effetto stazionario del vento e quello della pressione. Quest'ultimo è in genere circa il 20 % del primo, ovvero su un dislivello totale di 120 cm, 100 sono dovuti all'azione diretta del vento. Secondo la (48), il vento tende ad essere vieppiù la causa dominante sui bassi fondali e alle basse latitudini.

VI . LA MAREA ASTRONOMICA

1. La forza di marea. La forza di marea è una forza di volume (par. III.6) che agisce su ogni particella del nostro pianeta; essa è dovuta all'effetto combinato dell'attrazione gravitazionale esercitata da un astro sulla terra e dell'accelerazione centrifuga originata nel moto di rotazione di questi due corpi attorno al comune baricentro.

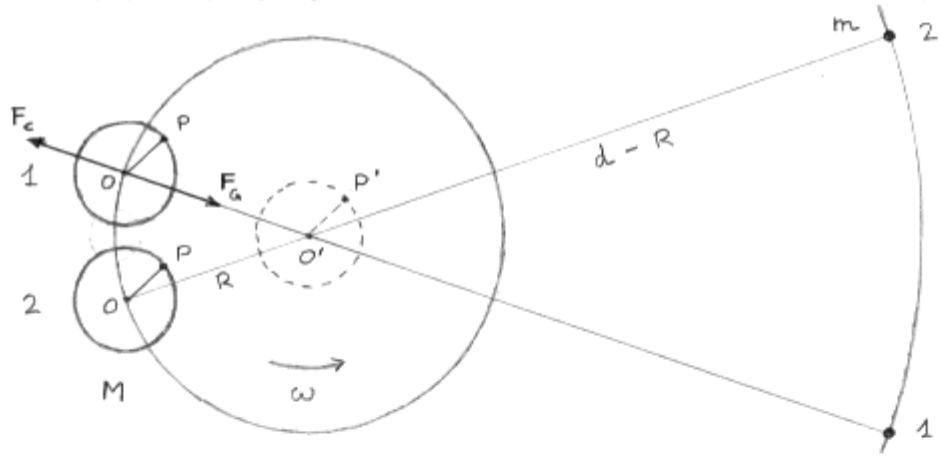


Fig. VI.1- Moto di rivoluzione terra-astro nello spazio inerziale.

La forza di marea si può ricavare in modo semplice considerando in uno spazio inerziale, solidale cioè con le stelle fisse, la terra, di massa M, ed un astro, di massa m, alla distanza d supposta per il momento costante nel tempo. La terra, di cui per ora trascuriamo il moto di rotazione attorno al suo asse, e l'astro formano un sistema a due corpi il cui baricentro O' è posto ad una distanza R dal nostro pianeta tale che

$$R / (d - R) = m / M \qquad (1)$$

Il moto rigido di rotazione dei due corpi con velocità angolare ω attorno al baricentro O' è per la terra un moto di **rivoluzione** se l'orientazione di questa non cambia rispetto allo spazio inerziale. La fig. 1 rappresenta questo moto nel suo piano: per ogni punto P del pianeta il vettore OP ha direzione costante, ed il punto P', tale che PP' = OO' = R, rappresenta il suo centro di rotazione. In ogni punto P quindi l'accelerazione centrifuga è $\omega^2 R$. La forza centrifuga $\mathbf{F}_c$ e la forza gravitazionale $\mathbf{F}_G$ applicata al baricentro terrestre O si bilanciano:

$$M \omega^2 R = G \frac{M m}{d^2} , \qquad (2)$$

dove G è la costante di gravitazione universale. Nel punto P agisce dunque la forza specifica centrifuga, diretta parallelamente a OO', di modulo costante

$$f_c = \omega^2 R = G \frac{m}{d^2} \qquad (3)$$

per la (2), e la forza specifica gravitazionale

$$f_G = G \frac{m}{a^2} , \qquad (4)$$

inversamente proporzionale al quadrato della distanza a di P dall'astro, e diretta verso quest'ultimo (fig. 2).

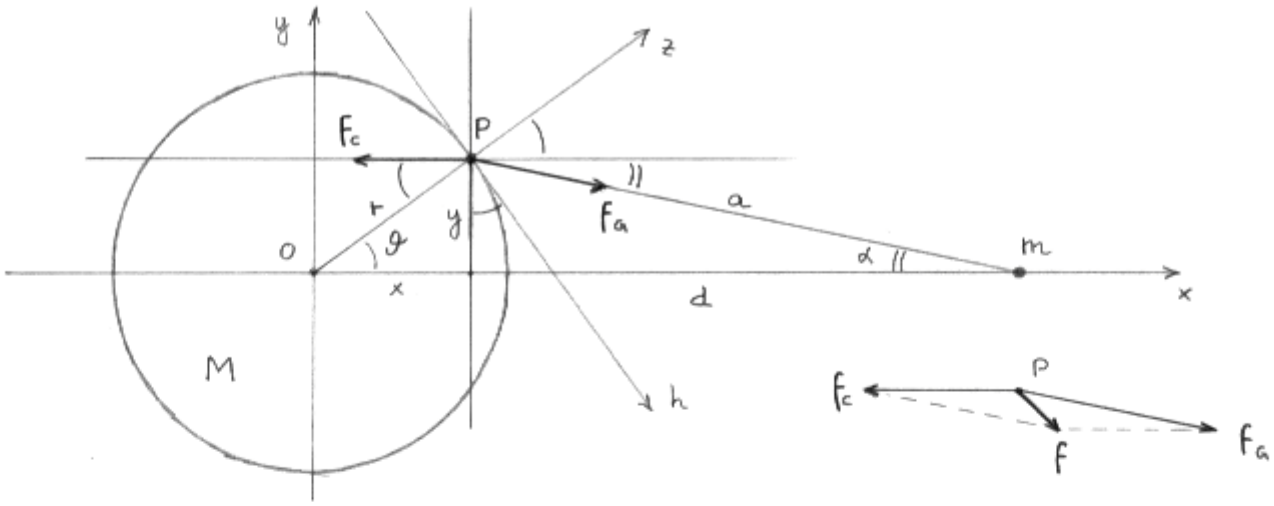


Fig. VI.2- Componenti della forza di marea.

La risultante $\mathbf{f} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_a$ è la forza specifica di marea, di cui ora vogliamo ricavare le componenti in funzione della distanza d terra-astro e dell'angolo zenitale geocentrico ϑ (fig. 2). Adottiamo nel piano OPm un sistema di coordinate Oxy, con l'asse x che punta verso l'astro; detto α l'angolo di parallasse in m, si ha per le (3,4)

$$\mathbf{f}_c = \left\{ -\frac{Gm}{d^2}, 0 \right\} , \qquad \mathbf{f}_a = \left\{ G\frac{m}{a^2}\cos\alpha , -G\frac{m}{a^2}\operatorname{sen}\alpha \right\} , \tag{5}$$

quindi

$$f_x = G\,m\left(\frac{\cos\alpha}{a^2} - \frac{1}{d^2}\right) , \tag{6}$$

$$f_y = -G\frac{m}{a^2}\operatorname{sen}\alpha = -G\frac{m}{a^2}\frac{y}{a} . \tag{7}$$

Con il teorema di Pitagora ricaviamo a in funzione di d:

$$a^2 = d^2 + r^2 - 2\,d\,x ; \tag{8}$$

tenendo presente che $x \sim r \ll d \sim a$, la (8) dà

$$a^{-2} \simeq d^{-2}\left(1 - 2\frac{x}{d}\right)^{-1} \simeq d^{-2}\left(1 + 2\frac{x}{d}\right) . \tag{9}$$

Nella (6) poniamo $\cos\alpha \simeq 1$ dal momento che $\alpha \ll 1$, e usiamo la (9); nella (7) poniamo $a^3 \simeq d^3$, e otteniamo

$$f_x \simeq 2\,\frac{G\,m}{d^3}\,x = 2\,\frac{G\,m\,r}{d^3}\cos\vartheta , \tag{10}$$

$$f_y \simeq -\frac{G\,m}{d^3}\,y = -\frac{G\,m\,r}{d^3}\operatorname{sen}\vartheta . \tag{11}$$

Posto $C = Gmr/d^3$, l'estremità del vettore $\mathbf{f}(\vartheta)$ applicato alla superficie terrestre descrive nel piano Oxy l'ellisse di semiassi 2C, C :

$$\frac{f_x^2}{4\,C^2} + \frac{f_y^2}{C^2} = 1 ; \tag{12}$$

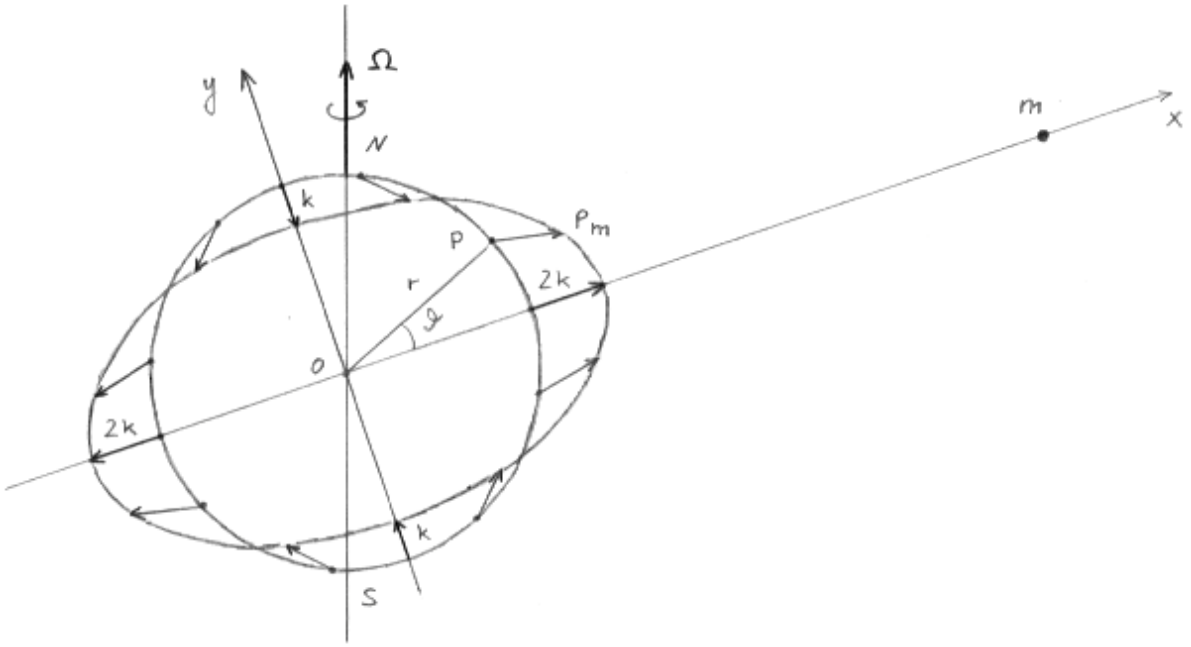


Fig. VI.3- Ellissoide della forza specifica di marea.

f forma con l'asse x un angolo φ tale che

$$\operatorname{tg}\varphi = -y/2x = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\vartheta \quad . \tag{13}$$

Il campo della forza di marea descritto da (10,11) ovvero da (12,13) è rappresentato sulla superficie terrestre in fig. 3. La forza **f** tende a dislocare il punto di applicazione $P = r\{\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta\}$ di un segmento ad essa proporzionale $k\{2\cos\vartheta, -\operatorname{sen}\vartheta\}$ nel punto

$$P_m = \{(r+2k)\cos\vartheta, (r-k)\operatorname{sen}\vartheta\}; \tag{14}$$

la superficie sferica originale si deforma in un ellissoide di rotazione la cui sezione nel piano Oxy ha per semiassi $r+2k$, $r-k$.

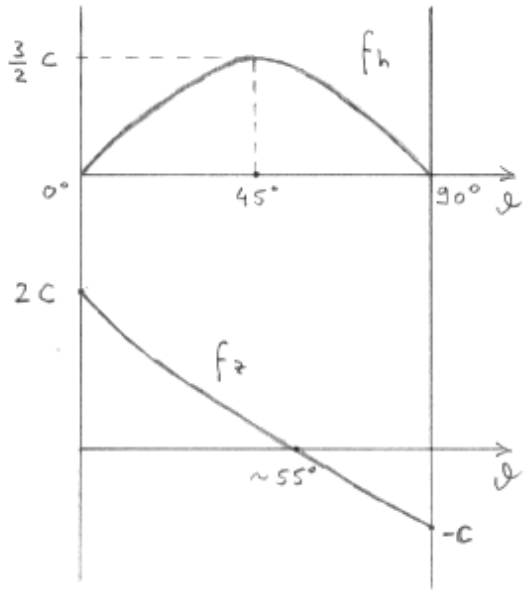


Fig. VI.4- Variazione della forza di marea con l'angolo zenitale geocentrico.

Dalla (12) si ricava che l'intensità della forza specifica di marea è compresa tra C e 2C. Gli unici due astri per cui il rapporto m/d^3 non è trascurabile sono la luna ed il sole; con

$G = 6.664 \times 10^{-8}\ g^{-1}\,cm^3\,sec^{-2}$,

$r = 6.371 \times 10^{8}$ cm,

$m_L = 7.343 \times 10^{25}$ g,

$d_L = 3.844 \times 10^{10}$ cm,

$m_S = 1.987 \times 10^{33}$ g,

$d_S = 1.495 \times 10^{13}$ cm,

si calcola rispettivamente che

$C_L = 5.489 \times 10^{-5}$ cm sec^{-2},

$C_S = 2.525 \times 10^{-5}$ cm sec^{-2}.

Il loro rapporto è $C_L/C_S = 2.17$: la forza

di marea della luna è circa il doppio di quella del sole.

Agli effetti dinamici, conviene riferire **f** al sistema Phz (fig. 2) con l'asse h orizzontale positivo dalla parte dell'astro, e l'asse z verticale positivo in alto :

$$f_h = f_x \operatorname{sen}\vartheta - f_y \cos\vartheta , \tag{15}$$

$$f_z = f_x \cos\vartheta + f_y \operatorname{sen}\vartheta . \tag{16}$$

Sostituendo nelle (15,16) le componenti (10,11), si ottiene

$$f_h \simeq \frac{3}{2} C \operatorname{sen} 2\vartheta , \tag{17}$$

$$f_z \simeq 3 C \left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3} \right) ; \tag{18}$$

la fig. 4 illustra le variazioni (17,18) della forza specifica orizzontale e verticale di marea con l'angolo ϑ . Ricordando i valori di C per la luna e per il sole, si ha che la componente verticale $f_z \leq 2\ C \sim 10^{-4}$ cm sec$^{-2} \ll g \sim 10^{3}$ cm sec^{-2} è trascurabile nei confronti dell'accelerazione di gravità; viceversa la componente orizzontale $f_h \leq 1.5\ C \sim 10^{-4}$ cm sec^{-2} è dello stesso ordine di grandezza delle altre forze agenti nell'oceano (forza del vento, gradiente di pressione). La forza specifica che provoca le maree nell'oceano è dunque la componente orizzontale

$$f_h \simeq 8.233 \times 10^{-5} \operatorname{sen} 2\vartheta_L + 3.787 \times 10^{-5} \operatorname{sen} 2\vartheta_S , \tag{19}$$

espressa in cm sec^{-2} in funzione degli angoli zenitali geocentrici della luna e del sole. I coefficienti non sono in realtà costanti, ma variano periodicamente nel tempo con la distanza d.

La forza di marea investe tutto il pianeta, provocando in particolare maree atmosferiche, maree terrestri e maree oceaniche; nella massa dell'oceano la forza f_h si può considerare costante con la profondità. Un oceano ideale ricoprente tutto il globo si deformerebbe nell'ellissoide rappresentato in fig. 2, con un effetto di alta marea nei punti aventi l'astro allo zenit e al nadir, di bassa marea lungo il circolo massimo perpendicolare alle congiungenti terra-astro.

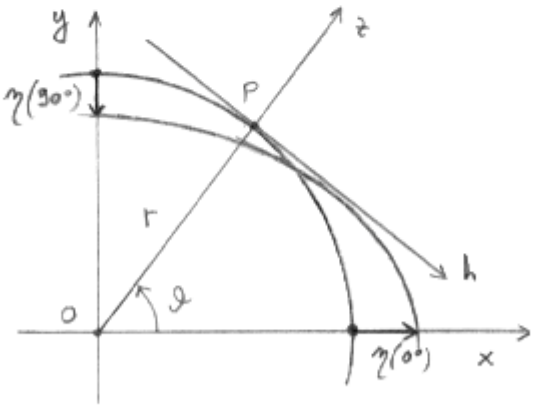


Fig. VI.5- Marea statica nell'oceano.

Per dare un ordine di grandezza ai dislivelli di marea, possiamo utilizzare l'equazione di equilibrio (V.33), con U = 0 :

$$0 = -g \frac{\partial \eta}{\partial h} + f_h , \tag{20}$$

che dà (fig. 5) con la (17):

$$d\eta = \frac{1}{g} f_h\, dh = -\frac{1}{g} f_h\, r\, d\vartheta = -\frac{3 C r}{2 g} \operatorname{sen} 2\vartheta\, d\vartheta . \tag{21}$$

Integrando la (21) da $\vartheta = 90°$ a $\vartheta = 0°$ si ottiene

$$\eta(0°) - \eta(90°) = \frac{3\ C\ r}{2\ g} , \tag{22}$$

che, in funzione di C_L e di C_S dà i dislivelli statici teorici rispettivamente per la marea lunare e solare :

$$\Delta\eta_L \simeq 53 \text{ cm} \quad , \quad \Delta\eta_S \simeq 25 \text{ cm} \quad . \tag{23}$$

La marea astronomica è dunque sollecitata nell'oceano terrestre da due ellissoidi di forza (fig. 3) che puntano l'asse maggiore rispettivamente verso la luna e verso il sole, e seguono il moto di questi due astri nello spazio sidereo inerziale. Nello stesso spazio la terra ruota attorno al suo asse in 23.934 ore; il moto risultante dei due ellissoidi di forza in un sistema di riferimento terrestre deve perciò tener conto di alcuni periodi astronomici fondamentali: il giorno e l'anno solare (365.242^d), i mesi lunari sidereo (27.3217^d), anomalistico (27.5546^d), sinodico (29.5306^d), il periodo di rotazione dell'asse dell'orbita lunare (8.85 anni), il periodo di nutazione o di regressione dei nodi lunari (18.6 anni). La combinazione di questi periodi fondamentali e dei loro sottomultipli origina un'infinità di onde armoniche componenti della marea lunisolare complessiva, le cui ampiezze e fasi relative dipendono dal luogo considerato. Matematicamente, la marea in un bacino si può calcolare mediante le equazioni per le onde lunghe (V.19,20), sostituendo ad **F** la forza specifica orizzontale di marea $\mathbf{f}_{h_L} + \mathbf{f}_{h_S}$ calcolata con la (17), dove le distanze d_L, d_S e gli angoli ϑ_L, ϑ_S sono espressi in funzione del tempo t. La forza lunisolare eccita le onde di marea negli oceani e nei grandi bacini; queste onde si propagano, seguendo le leggi dell'idrodinamica, anche nei mari adiacenti, originandovi cooscillazioni di marea di ampiezza spesso superiore a quella della marea in essi direttamente indotta.

2. La teoria armonica. Vista l'esistenza nel moto della luna e del sole di una serie di periodi costanti e definiti, è stata introdotta già da Kelvin (1872) la cosiddetta **teoria armonica delle maree**, la quale prevede l'esistenza delle stesse periodicità nella forza di marea. Dati perciò i periodi $T_n = 2\pi/\sigma_n$, la forza di marea è esprimibile mediante una somma di componenti di ampiezza variabile con la latitudine :

$$\mathbf{f} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{f}_n \quad ; \qquad \mathbf{f}_n = \mathbf{a}_n \cos(\sigma_n t + \delta_n) \quad ; \tag{24}$$

siccome le velocità angolari σ_n non sono in genere in rapporto tra di loro, **f** è detta una funzione (vettoriale) quasi periodica. Il numero N di componenti armoniche, in teoria infinito, è limitato alle ampiezze a_n significative; l'analisi di Doodson (1922) ha messo in evidenza più o meno 100 componenti a lungo periodo, 160 a periodo diurno, 115 a periodo semidiurno, 14 a periodo prossimo ad otto ore.

Ogni componente armonica di marea, individuata univocamente dalla sua frequenza o dal suo periodo, ha nella tradizione una sigla che ne ricorda l'origine. Fatta uguale a 100 l'ampiezza della componente **principale lunare** M_2, vi sono 63 componenti con ampiezza maggiore di 0.5; le sette componenti più significative sono elencate nella tabella 1: quattro sono semidiurne (portano l'indice 2), tre sono diurne (indice 1).

La marea $\eta(t)$ eccitata nell'oceano dalla forza (24) è anch'essa esprimibile come somma di componenti armoniche, con gli stessi periodi T_n della forza **f** ma con ampiezze e fasi diverse, funzione del luogo considerato:

$$\eta(\mathbf{x},t) = \sum_{n=1}^{N} \eta_n(\mathbf{x},t) \quad , \qquad \eta_n(\mathbf{x},t) = H_n(\mathbf{x}) \cos\{\sigma_n t + \varphi_n(\mathbf{x})\} \quad . \tag{25}$$

Componente	T (h)	σ (°/h)	σ (rad/h)	a
M_2 lunare semidiurna principale	12.4206	28.9841	0.505868	100
S_2 solare semidiurna principale	12	30	0.523599	46.6
N_2 lunare semidiurna ellittica maggiore	12.6583	28.4397	0.496367	19.2
K_2 lunisolare declinazione semidiurna	11.9672	30.0821	0.525032	12.7
K_1 lunisolare declinazione diurna	23.9345	15.0411	0.262516	58.4
O_1 lunare diurna principale	25.8193	13.9430	0.243352	41.5
P_1 solare diurna principale	24.0659	14.9589	0.261083	19.4

Tab. VI.1- Principali componenti armoniche della marea astronomica.

A seconda dei rapporti relativi tra le ampiezze delle diverse componenti, l'aspetto complessivo della marea lunisolare registrata in un dato porto cambia notevolmente. Indicata l'ampiezza di una componente con la sua sigla, si usano definire i rapporti

$$F = \frac{K_1 + O_1}{M_2 + S_2} \quad , \qquad A = \frac{K_1 + O_1}{M_2} \quad , \tag{26}$$

usati rispettivamente dai francesi e dagli americani; in base al loro valore numerico si può classificare la marea nei tipi

$$\begin{array}{lcl} \text{semidiurno:} & F < 0.25 \ ; & A < 0.5 \ , \\ \text{misto} \quad : & 0.25 < F < 1.25 \ ; & 0.5 < A < 2 \ , \\ \text{diurno} \quad : & F > 1.25 \ ; & A > 2 \ . \end{array}$$

3. Le previsioni di marea. Il livello del mare in un dato punto cambia continuamente per l'effetto combinato di vari fattori. Variazioni a lungo periodo sono dovute a movimenti relativi della costa, alla variazione del volume totale dell'acqua negli oceani (fusione o accrescimento delle calotte polari); variazioni a periodo medio sono dovute a cambiamenti di densità per interazione con la radiazione solare e con l'atmosfera, all'azione del vento e della pressione dell'aria che provocano onde di periodo variabile da molte ore a pochi secondi.
A queste variazioni che o non sono prevedibili, o lo sono solamente con molta fatica e poca precisione, si sovrappone la marea astronomica (25), che può essere calcolata per un istante qualsiasi con la precisione desiderata, note che siano l'ampiezza e la fase di ogni componente.

La formula comunemente usata per il calcolo della marea astronomica con il metodo armonico, in base al tempo locale t, è la seguente:

$$\eta(\mathbf{x},t) = \sum_{n=1}^{M} f_n(t)\, H_n(\mathbf{x}) \cos\left\{\sigma_n t + \alpha_n(0,t) - g_n(\mathbf{x})\right\} \quad ; \tag{27}$$

la (27) differisce dalla (26) in quanto la variazione a lungo periodo è stata attribuita all'ampiezza moltiplicandola per il fattore nodale f, e alla fase α, entrambi funzioni note e tabulate del tempo t (Schureman 1958). Le costanti H e g, caratteristiche di ogni componente per ogni porto, prendono il nome di **costanti armoniche**; esse si ricavano dall'analisi armonica dei mareogrammi registrati in quel porto, separando ogni singola componente di marea per mezzo di opportuni filtri numerici applicati alla serie temporale dei valori, di solito orari, del livello del mare. Per una buona determinazione delle costanti armoniche è neces-

sario almeno un anno di registrazioni. Note che siano le costanti armoniche, si ricavano dalle tabelle o si calcolano il fattore nodale f e la **fase iniziale per Greenwich** α per il periodo in esame, indi si calcolano e si sommano le componenti più significative, di velocità angolare σ nota, con la (27).

TRIESTE	M_2	S_2	N_2	K_2	K_1	O_1	P_1
H (cm)	26.7	16.0	4.5	4.3	18.2	5.4	6.0
g (°)	277.5	286.1	274.9	286.1	71.1	61.1	71.1
g (rad)	4.843	4.993	4.798	4.993	1.241	1.066	1.241

Tab. VI.2- Costanti armoniche per il porto di Trieste.

La tabella 2 elenca le costanti armoniche per il mareografo di Trieste, corrispondenti alle sette componenti principali (tab. 1) usate dall'Istituto Talassografico per il calcolo della marea astronomica. I rapporti (26) sono F = 0.55 ed A = 0.88, cosicchè la marea lunisolare a Trieste è classificata nel tipo misto (prevalentemente semidiurno), sia secondo la definizione francese che secondo quella americana. La fig. 6 mostra la marea astronomica $\eta(t)$ a Trieste calcolata con i dati suddetti per il mese di settembre 1977: la curva presenta due massimi e due minimi al giorno, che tendono a ridursi ad uno solo (giorno 6) in vicinanza delle quadrature (luna al primo e all'ultimo quarto). Le ampiezze sono massime alle sigizie (luna piena e luna nuova), quando gli ellissoidi di forza della luna e del sole hanno gli assi maggiori quasi coincidenti, e minime alle quadrature, quando tendono ad essere perpendicolari. Gli istanti delle alte e delle basse maree sono ottenuti calcolando con un procedimento numerico di approssimazioni successive i punti in cui si annulla la derivata della (27).

4. Le maree nell'Adriatico. La forza orizzontale specifica di marea (19) $f_h \sim 10^{-4}$ cm sec^{-2} dà luogo nell'oceano, per la (V.35), ad un dislivello stazionario con una pendenza $f_h/g \sim 1$ cm/100 km : la marea direttamente indotta in un mare di piccole dimensioni dalla forza lunisolare è perciò abbastanza ridotta. Questo è il caso, per esempio, del mare Adriatico, nel quale si osservano però delle maree che raggiungono all'estremità settentrionale un'escursione superiore al metro; anche se inferiori di un ordine di grandezza alle massime maree oceaniche, queste escursioni sono però le più ampie di tutto il bacino mediterraneo: tale fatto si spiega con il fenomeno delle **cooscillazioni di marea.**

L'onda di marea indotta nel Mediterraneo fa sì che il livello del mare nello stretto di Otranto oscilli su e giù: questa oscillazione, agendo come uno stantuffo, origina un'onda che si propaga dentro l'Adriatico, viene deviata dalla forza di Coriolis, e si riflette all'estremità settentrionale chiusa del bacino. Il fenomeno può essere studiato con le equazioni (V.19,20), in assenza di forze agenti, imponendo come condizione al contorno attraverso il canale di Otranto che il livello vari con la frequenza di una componente armonica.

Una semplice descrizione delle maree nell'Adriatico si ottiene, sulla base della distribuzione nota delle costanti armoniche lungo le coste del bacino, considerando le **linee** congiungenti i punti **di uguale ampiezza** H e le linee congiungenti i punti di ugual fase g o **linee cotidali.** Le componenti semidiurne, di cui

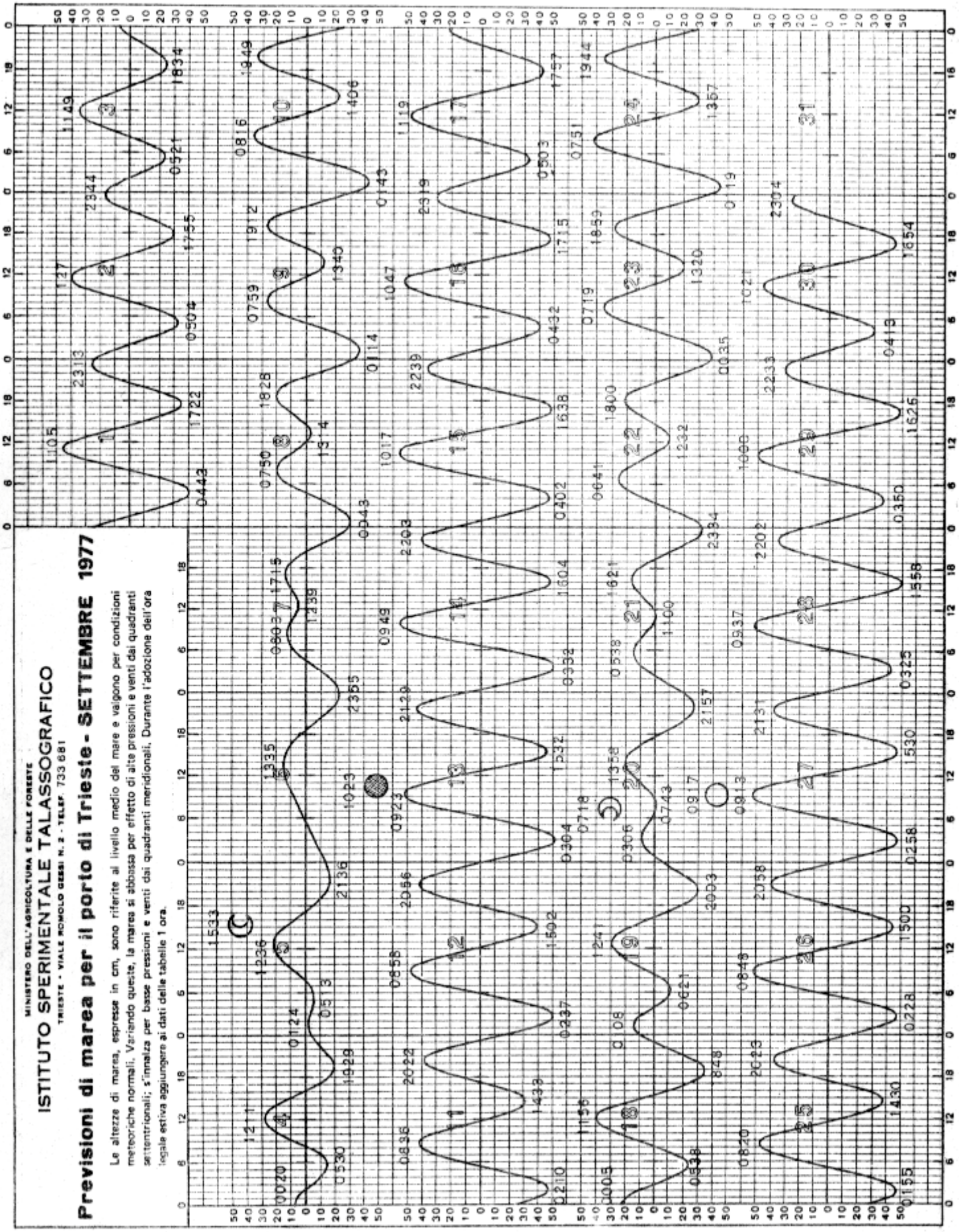


Fig. VI.6 - Marea astronomica di tipo misto, calcolata con 7 componenti armoniche.

la M_2 è rappresentata in fig. 7, presentano un **nodo anfidromico**, ove è nulla l'escursione di marea, originato dalla rotazione terrestre, e attorno al quale la fase della marea ruota in senso antiorario alla velocità angolare di circa 30°/h: la marea si propaga lungo la costa orientale, riempie l'estremità settentrionale e torna indietro lungo la costa italiana, completando il giro in circa 12 ore. Le linee cotidali, lungo le quali l'alta marea avviene contemporaneamente, sono disposte radialmente a partire dal nodo anfidromico; le linee di eguale ampiezza sono grosso modo circoli concentrici. Le massime ampiezze si hanno all'estremità settentrionale del bacino, in quanto l'onda di marea è amplificata per effetto dell'acqua bassa. Per quanto riguarda le componenti diurne (K_1 e P_1 in fig. 7), il nodo anfidromico è esterno al bacino: le linee cotidali sono pressochè parallele e longitudinali, le linee di egual ampiezza sono anche parallele tra loro e trasversali al bacino. L'ampiezza dell'onda diurna cresce verso l'estremità settentrionale; l'alta marea avviene contemporaneamente lungo la costa est, e avanza verso la costa italiana che raggiunge dopo meno di due ore. L'andamento complessivo della marea presenta linee cotidali e di eguale ampiezza simili a quelle della M_2 .

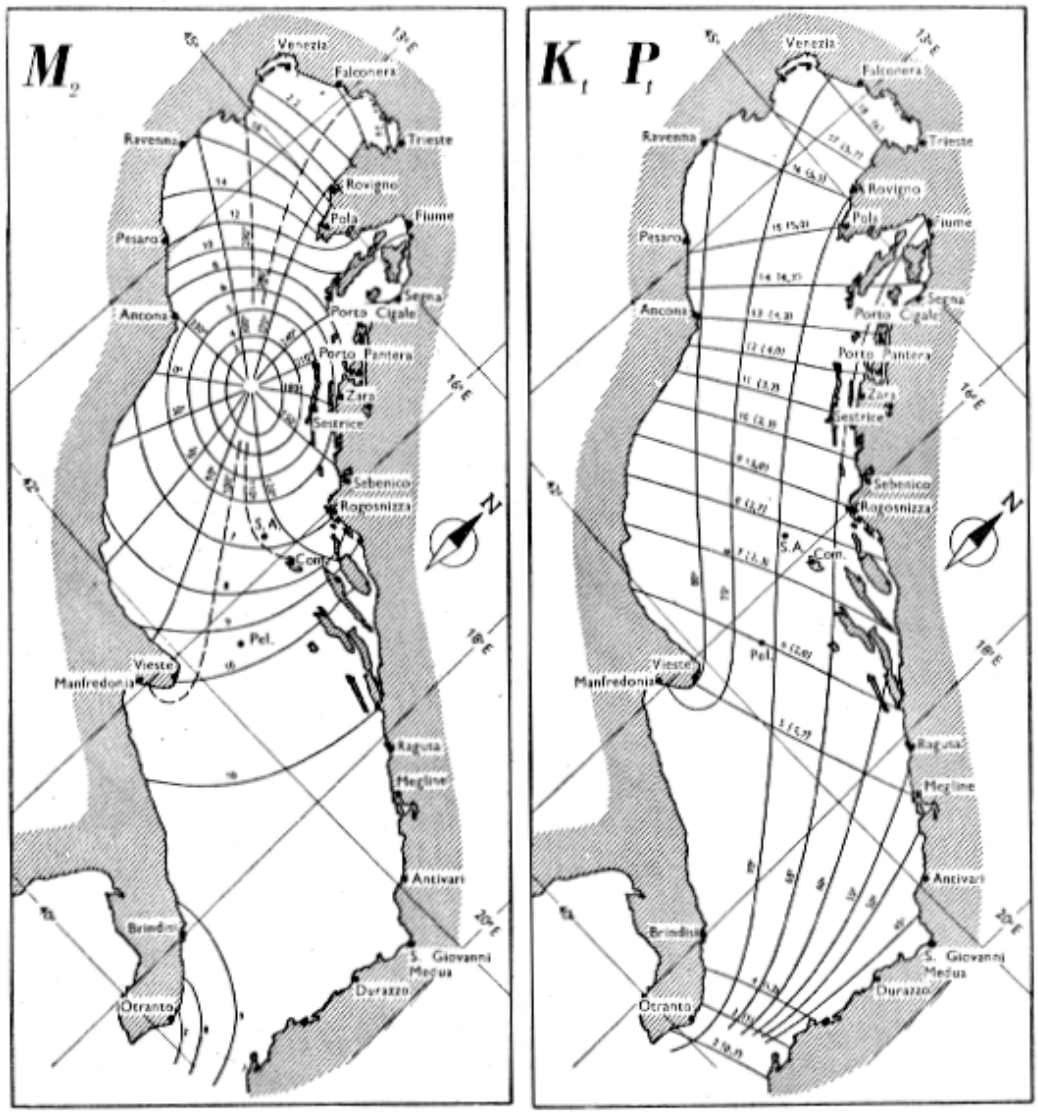


Fig. VI.7- Linee cotidali (gradi) e linee di uguale ampiezza per le componenti semidiurne M_2 e diurne K_1 , P_1 nell'Adriatico (Polli, 1960).

VII . ONDE

1. Classificazione delle onde. La superficie libera del mare è in continuo movimento rispetto ad una superficie orizzontale d'equilibrio, equipotenziale nel campo di gravità terrestre, che costituisce il cosiddetto livello medio. Lo scostamento dal livello medio, funzione dello spazio e del tempo, descrive il moto ondoso $\eta(\mathbf{x},t)$. Il moto ondoso è innescato da scambi d'energia cinetica e termica con l'atmosfera e con il sole, e dalla forza lunisolare di marea. Nel suo complesso, il moto ondoso non è un fenomeno periodico; può essere studiato statisticamente, in funzione del tempo in un dato luogo, o in funzione dello spazio ad un dato istante. Si può anche evidenziare in $\eta(\mathbf{x},t)$ una componente quasi periodica, caratterizzata da un certo spettro che descrive l'andamento dell'ampiezza dell'oscillazione o della sua energia in funzione della frequenza o del periodo. Uno spettro medio dell'ampiezza del moto ondoso è schematizzato in fig. 1; in base al periodo caratteristico, ed in base alla forza agente ed alla forza di richiamo, dal cui contrasto nasce l'oscillazione periodica, si può dare una classificazione delle onde di superficie.

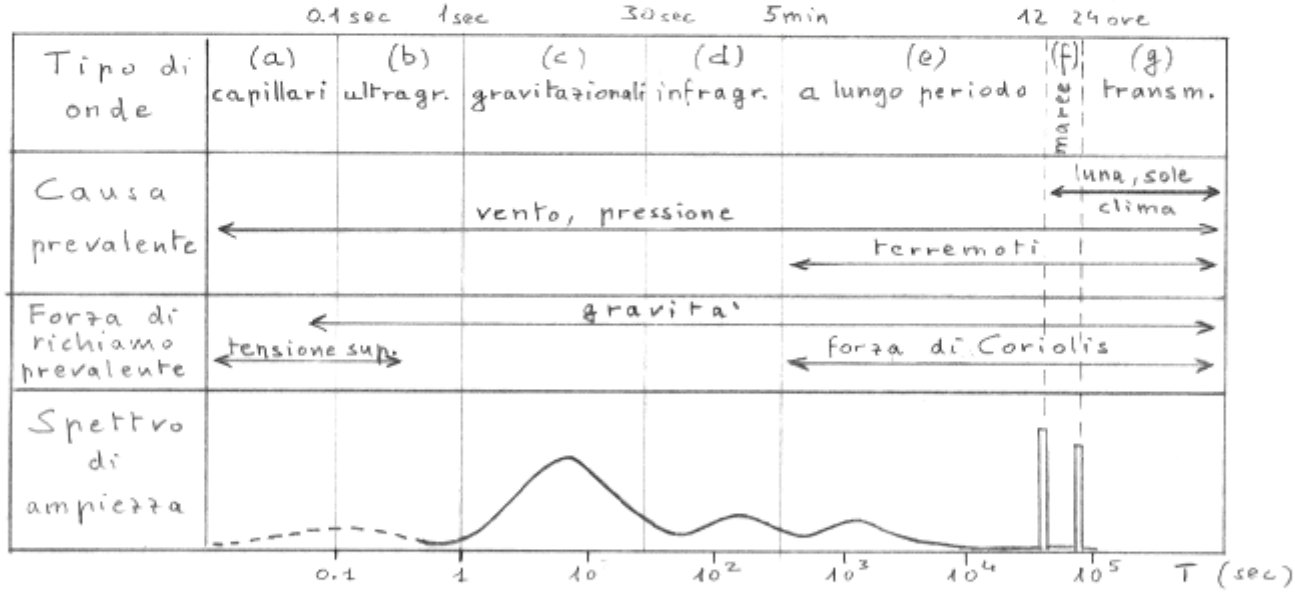


Fig. VII.1- Spettro e classificazione delle onde (Munk, 1951).

(a) **Onde capillari:** sono dovute al contrasto tra un impulso meteorico tendente a deformare la superficie del mare e la tensione superficiale; i periodi caratteristici sono inferiori al decimo di secondo. (b) **Onde ultragravitazionali:** la forza di gravità richiama alla posizione orizzontale la superficie perturbata dal vento e dalla pressione atmosferica, aiutata dalla tensione superficiale; i periodi sono tra 0.1 ed 1 secondo. (c) **Onde gravitazionali:** il moto è a scala maggiore, con periodi da 1 a 30 secondi; la forza di gravità contrasta gli impulsi del vento e della pressione atmosferica (mar vivo). Le onde continuano ad esistere anche in assenza delle forze meteoriche (mar morto). (d) **Onde infragravitazionali:** con periodo tra 0.5 e 5 minuti sono generate dal vento e dalla pressione, o dall'interazione tra onde gravitazionali di diverso periodo. (e) **Onde a lungo periodo:** rientrano in

questa categoria le onde stazionarie o sesse, i fenomeni di ingorgo, le onde generate dai terremoti (tsunami), le onde inerziali ed in particolare le (f) **onde di marea** a periodo semidiurno e diurno. (g) Le **onde transmareali** comprendono le componenti di marea a lungo periodo, e tutte le fluttuazioni del livello medio del mare originate da fattori climatici ed ambientali.

Questa classificazione non ha naturalmente lo scopo di imporre precise barriere tra i diversi "tipi" di onde; il fenomeno è uno solo, nel quale l'importanza relativa dei diversi termini in gioco sfuma con continuità tra due limiti estremi. Lo spettro è continuo, ed in tal senso non è giustificata alcuna distinzione fisica tra ciò che ora chiamiamo "onda" e le "correnti" trattate nel cap. IV.

2. Onde progressive. Un'onda piana progressiva lungo la direzione x è rappresentata matematicamente da una funzione periodica nello spazio e nel tempo, di periodo rispettivamente L (lunghezza d'onda) e T, del tipo

$$f\left(\frac{2\pi}{L}x \pm \frac{2\pi}{T}t\right) = f(kx \pm \sigma t) \; ; \qquad (1)$$

$k = 2\pi/L$ è il numero d'onda, $\sigma = 2\pi/T$ la velocità angolare. A parità di argomento $kx \pm \sigma t = a$, la funzione (1) prende lo stesso valore f(a); ciò avviene per

$$x = \mp \frac{\sigma}{k} t + \frac{a}{k} = \mp c t + \frac{a}{k} \; , \qquad (2)$$

il che significa che il valore f(a) si propaga lungo la direzione x con la velocità

$$c = \frac{\sigma}{k} = \frac{L}{T} \; , \qquad (3)$$

detta **velocità di fase**, nella direzione delle $x < 0$ o delle $x > 0$ a seconda del segno ± nella (1). In generale, la funzione (1) si può esprimere come combinazione di funzioni sinusoidali; considereremo perciò onde piane progressive lungo la direzione $x > 0$ del tipo

$$\eta(x,t) = \varepsilon \cos(kx - \sigma t) \; , \qquad (4)$$

di cui la fig. 2 rappresenta una sezione nel piano x,z all'istante t_0. In ogni punto x, η varia sinusoidalmente nel tempo con periodo T. La fase dell'onda, per esempio la sua cresta, procede alla velocità c (3). Sommando due onde progressive con la stessa ampiezza ε in senso opposto, di uguale lunghezza d'onda e periodo, si ottiene un'onda stazionaria di ampiezza doppia; questo risultato è una conseguenza delle formule trigonometriche di prostaferesi :

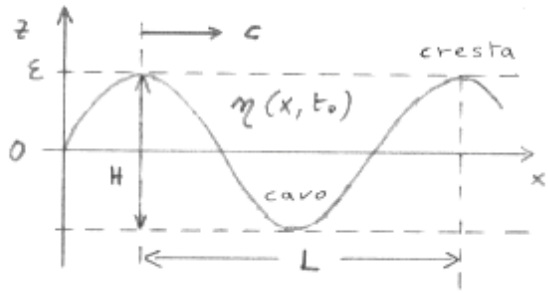


Fig. VII.2- Onda progressiva.

$$\varepsilon \cos(kx - \sigma t) + \varepsilon \cos(kx + \sigma t) = 2\varepsilon \cos kx \cos \sigma t \; . \qquad (5)$$

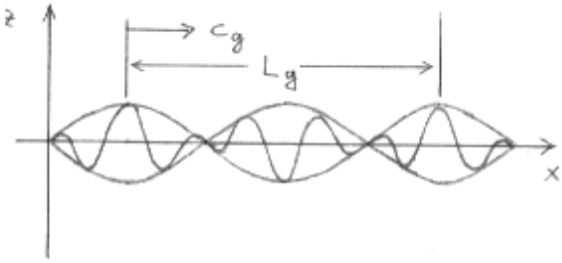


Fig. VII.3- Velocità di gruppo.

Le onde stazionarie rappresentano per esempio le sesse in un bacino.

Capita in generale che onde progressive di diversa lunghezza e periodo si sovrappongono, formando un treno d'onde. Consideriamo per esempio

$$\eta_1 \sim \cos(k_1 x - \sigma_1 t) \; , \; \eta_2 \sim \cos(k_2 x - \sigma_2 t) \; , \qquad (6)$$

$$\eta_1 + \eta_2 \sim 2\cos\left\{\frac{k_2-k_1}{2}x - \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}t\right\}\cos\left\{\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}t\right\}; \qquad (7)$$

l'onda risultante ha come numero d'onda e velocità angolare la media di k_1, k_2 e di σ_1, σ_2 (secondo termine nella (7)), ed un'ampiezza modulata (primo termine nella (7)) con una lunghezza d'onda ed un periodo

$$L_g = 4\pi/(k_2 - k_1) \quad , \quad T_g = 4\pi/(\sigma_2 - \sigma_1) \; ; \qquad (8)$$

Se $k_1 \sim k_2$ e $\sigma_1 \sim \sigma_2$, l'onda risultante presenta i cosiddetti **battimenti** (fig. 3), con gruppi di onde i cui culmini distano di $L_g/2$, che procedono nella direzione $x > 0$ alla velocità

$$c_g = \lim \frac{L_g}{T_g} = \lim \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{k_2 - k_1} = \frac{d\sigma}{dk} \; ; \qquad (9)$$

la (9) prende il nome di **velocità di gruppo.**

3. Onde gravitazionali di Airy. Lo studio delle onde è molto complesso; per poter cogliere alcuni aspetti fondamentali del problema ci limitiamo a considerare la teoria di Airy (1845) relativa alle onde gravitazionali di piccola ampiezza. Le ipotesi fondamentali sono: il fluido è ideale (senza attrito) e irrotazionale (senza vortici); l'accelerazione di Coriolis e la tensione superficiale sono trascurabili; la profondità h del bacino, la densità ρ, la pressione atmosferica p_0 sono costanti; l'ampiezza dell'onda è molto piccola rispetto alla lunghezza d'onda e alla profondità ($\varepsilon \ll L$, $\varepsilon \ll h$). Con tali ipotesi, le equazioni del moto (irrotazionalità, continuità e momento), nel sistema di riferimento della fig. 4, sono

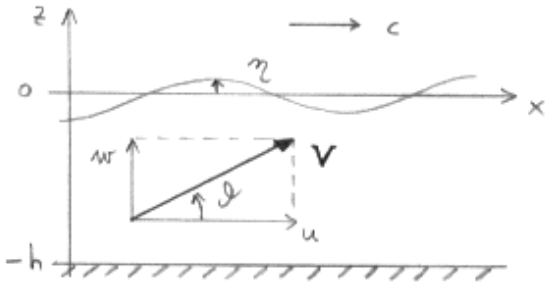


Fig. VII.4- Assi di riferimento.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \, , \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \, , \\ &\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \, , \end{aligned} \qquad (10)$$

con le condizioni al contorno

$$w(x,0,t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad , \quad w(x,-h,t) = 0 \quad , \quad p(x,0,t) = p_0 \quad . \qquad (11)$$

Si può verificare che le soluzioni sono date da

$$\eta(x,t) = \varepsilon \cos(kx - \sigma t) \, , \qquad (12)$$

$$u(x,z,t) = \varepsilon\sigma \frac{\cosh k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \cos(kx - \sigma t) \, , \qquad (13)$$

$$w(x,z,t) = \varepsilon\sigma \frac{\operatorname{senh} k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} \operatorname{sen}(kx - \sigma t) \, , \qquad (14)$$

$$\sigma = \{gk \operatorname{tgh} kh\}^{1/2} \, . \qquad (15)$$

Le funzioni iperboliche, definite da

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \, , \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \, , \qquad (16)$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, , \qquad (17)$$

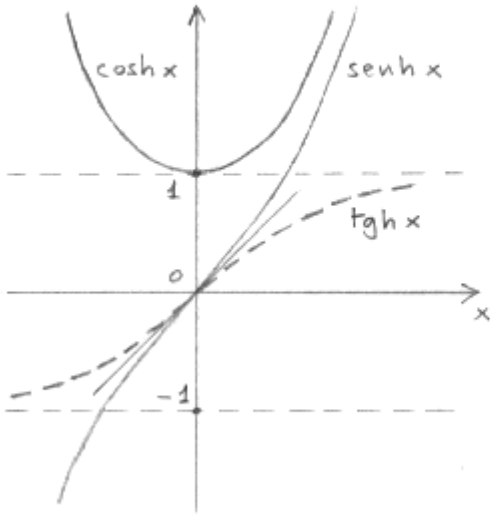


Fig. VII.5- Funzioni iperboliche.

sono rappresentate in fig. 5. In particolare:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to 0} \operatorname{senh} x = x \,, \qquad (18)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{tgh} x = 1 \,. \qquad (19)$$

La velocità di fase (3), in base alla velocità angolare (15) è funzione del numero d'onda k, e quindi della lunghezza d'onda L; detta

$$c_o = \sqrt{g\,h}\,, \qquad (20)$$

si ha

$$c = c_o \left\{ \frac{1}{k\,h} \operatorname{tgh} kh \right\}^{1/2} = \qquad (21)$$

$$= \sqrt{\frac{g}{2\pi}} \sqrt{L \operatorname{tgh} 2\pi \frac{h}{L}} \,. \qquad (22)$$

La velocità di propagazione (22) dell'onda cresce con la sua lunghezza; onde di diversa lunghezza che partono in fase, ritardano o anticipano l'una rispetto all'altra dopo una certa distanza: questo comportamento delle onde progressive, ovvero il fatto che $\sigma = \sigma(k)$, è detto **dispersione.** In base ai limiti (18,19) della tangente iperbolica si ricavano i limiti della velocità di fase (21) :

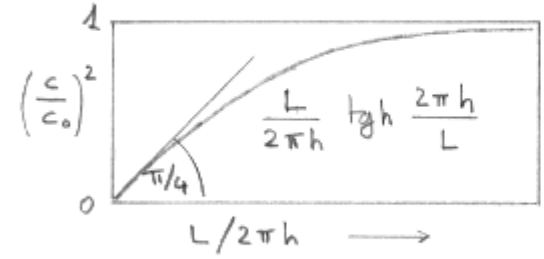


Fig. VII.6- Velocità di fase in funzione di L/h.

$$kh \ll 1,\ L \gg h : \quad c = c_o = \sqrt{gh}\,, \qquad (23)$$

$$kh \gg 1,\ L \ll h : \quad c = \sqrt{g/k} = \sqrt{gL/2\pi}\,. \qquad (24)$$

L'andamento del rapporto $(c/c_o)^2$ in funzione di $L/2\pi h$ è illustrato nella fig.6.

Dall'espressione (22) della velocità di fase si desume anche il comportamento di un treno d'onde di lunghezza L incidente sulla costa; quando il rapporto h/L diminuisce con la profondità, diminuisce la velocità di propagazione dell'onda, e la parte del fronte più vicina alla costa viene frenata: la tendenza delle onde è di portarsi parallele alla linea costiera (fig. 7).

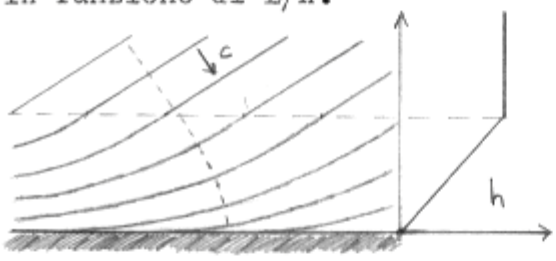


Fig. VII.7- Deviazione del fronte d'onda in prossimità della riva.

Esamineremo ora il comportamento delle onde di Airy nei casi limite $L \ll h$ e $L \gg h$.

4. Onde di superficie. Consideriamo onde gravitazionali progressive in acqua relativamente profonda; per ipotesi è

$$L \ll h \,, \qquad k\,h \gg 1 \,, \qquad (25)$$

con l'importante risultato che la velocità di fase (24) non dipende dalla profondità: si dice che le onde "non sentono il fondo". Combinando la (24) e la (3) si hanno le seguenti relazioni tra la velocità di fase c in m/sec, la lunghezza d'onda L in metri ed il periodo T in secondi:

$$c = \sqrt{\frac{g}{2\pi}}\, L^{1/2} \simeq 1.25\, L^{1/2}\,, \qquad (26)$$

$$c = \frac{g}{2\pi} T \simeq 1.56 \; T \quad , \tag{27}$$

$$L = \frac{g}{2\pi} T^2 \simeq 1.56 \; T^2 \quad . \tag{28}$$

Le formule (26,27,28) si applicano bene alle onde gravitazionali che si incontrano in mare aperto in assenza di vento (mar morto). Di queste in genere si stima l'**altezza significativa**, definita come "l'altezza H (fig. 2) media del terzo di onde più alte", la lunghezza d'onda e la velocità, o il periodo; statisticamente è stato riscontrato un ottimo accordo con le relazioni teoriche.

La relazione di dispersione (15) dà per la (25)

$$\sigma = \sqrt{g\,k} \quad , \tag{29}$$

cosicchè la velocità di gruppo (9) è

$$c_g = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\, c \quad , \tag{30}$$

pari a metà della velocità di fase.

Le espressioni (13,14) del campo orizzontale e verticale di velocità si possono semplificare in virtù di (25):

$$\frac{\begin{matrix}\cosh\\ \operatorname{senh}\end{matrix} k(h+z)}{\operatorname{senh} kh} = \frac{e^{k(h+z)} \pm e^{-k(h+z)}}{e^{kh} - e^{-kh}} \simeq \frac{e^{k(h+z)}}{e^{kh}} = e^{kz} , \tag{31}$$

cosicchè le onde in acqua profonda sono descritte da

$$\eta = \varepsilon \cos(kx - \sigma t) \quad , \tag{32}$$

$$u = \varepsilon\sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t) \quad , \tag{33}$$

$$w = \varepsilon\sigma e^{kz} \operatorname{sen}(kx - \sigma t) \quad . \tag{34}$$

L'intensità della velocità **V** (fig. 4) decresce esponenzialmente con la profondità z:

$$V = \sqrt{u^2 + w^2} = \varepsilon\sigma e^{kz} = \varepsilon\sigma e^{2\pi z/L} \quad ; \tag{35}$$

l'angolo ϑ che il vettore **V** forma con l'asse x è dato da

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{w}{u} = \operatorname{tg}(kx - \sigma t) \quad , \quad \vartheta = kx - \sigma t = 2\pi\frac{x}{L} - \sigma t \; . \tag{36}$$

La (35) stabilisce che alla profondità pari ad una lunghezza d'onda $z = -L$ la velocità è ridotta del fattore $e^{-2\pi}$, è cioè pari a circa lo 0.2 % della velocità $\varepsilon\sigma$ in superficie; il mare è dunque interessato dal moto ondoso solo per uno strato $L \ll h$, per cui le onde in acqua profonda vengono dette anche **onde di superficie.** L'angolo ϑ (36) varia, fisso il tempo t, da 0 a 2π a seconda del rapporto x/L, ed è costante a tutte le profondità; in un punto x_o, z_o, il vettore velocità **V** ruota in senso orario con la velocità angolare σ dell'onda (fig. 7).

Per fare un esempio, con h=1000 m, L=10 m, si ha T=2.5 sec, c=3.9 m/sec; se ε = 1 m, la velocità dell'acqua in superficie è 2.5 m/sec, e alla profondità L è 0.5 cm/sec. Si badi bene che, nonostante l'elevata velocità dell'acqua, l'onda non produce alcun spostamento orizzontale in grande; infatti la

media della velocità u (33) fatta su di un periodo T in un punto x_o, z_o fisso è nulla.

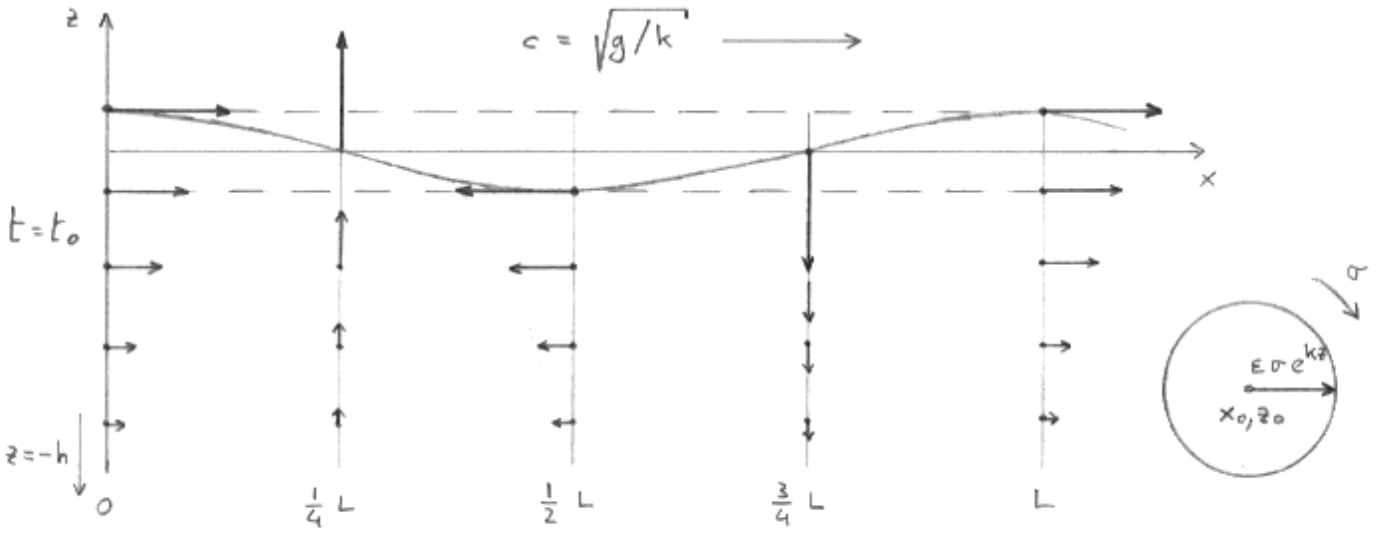


Fig. VII.7- Livello e velocità del mare in un'onda di superficie.

5. Onde lunghe. Esaminiamo ora il caso di onde gravitazionali di Airy in acqua relativamente bassa :

$$L \gg h \quad , \qquad k\,h \ll 1 \quad . \tag{37}$$

La relazione di dispersione (15) diventa, per la (18),

$$\sigma = k\sqrt{g\,h} = k\,c_o \; ; \tag{38}$$

velocità di fase (3) e velocità di gruppo (9) sono uguali tra di loro e pari a (23)

$$c = c_g = c_o = \sqrt{g\,h} \; : \tag{39}$$

questa è la velocità delle onde lunghe, già incontrata in (V.23).

Con l'ipotesi (37), sfruttando il limite (18) nelle (13,14), ed essendo $\cosh k(h+z) \simeq 1$ nella (13), le onde in acqua bassa o **onde lunghe** sono descritte da

$$\eta = \varepsilon \cos(kx - \sigma t) \quad , \tag{40}$$

$$u = \frac{\varepsilon\sigma}{kh}\cos(kx - \sigma t) = \varepsilon\sqrt{\frac{g}{h}}\cos(kx - \sigma t) \quad , \tag{41}$$

$$w = \varepsilon\sigma\frac{h+z}{h}\,\mathrm{sen}(kx - \sigma t) = \varepsilon\sqrt{\frac{g}{h}}\;2\pi\,\frac{h+z}{L}\,\mathrm{sen}(kx - \sigma t) \quad . \tag{42}$$

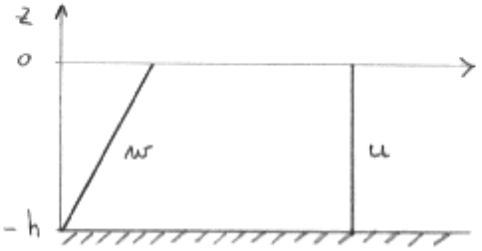


Fig. VII.8- Profili verticali della velocità nelle onde lunghe.

In particolare, si nota che la velocità orizzontale (41) è costante con la profondità, ed è in fase con il livello η dell'onda; la velocità verticale (42) decresce linearmente a zero sul fondo z=-h, partendo da un valore che è in superficie molto inferiore a quello di u :

$$\left|\frac{w}{u}\right|_{z=0} = 2\pi\,\frac{h}{L} \ll 1 \quad . \tag{43}$$

In ogni punto x_o, y_o il vettore velocità **V** descrive, ruotando in senso orario, un'ellisse con il semiasse maggiore orizzontale $a = |u|$ costante, ed il semiasse minore verticale $b = |w|$ decrescente linearmente con la profondità. Nell'onda lunga il campo di velocità è quindi praticamente orizzontale e costante con la profondità; ciò conforta la teoria delle equazioni di storm surge, ove si usa appunto una velocità orizzontale media.

Per fare un esempio numerico, prendiamo $h = 100$ m, che dà $c = 31.3$ m/sec; con $L = 10$ km si ha $T = L/c = 5.3$ min. Se $\varepsilon = 1$ m, allora la velocità orizzontale è di 31.3 cm/sec, e quella verticale in superficie è di 1.95 cm/sec.

VIII . STRUMENTI E MISURE

1. Introduzione. La profonda e rapida evoluzione che si è manifestata negli ultimi anni nel campo dell'elettronica e nella costruzione di circuiti miniaturizzati, evoluzione che tuttora continua, ha reso possibile l'allestimento di strumenti via via più complessi e potenti anche nel settore delle ricerche oceanografiche. Assieme alla sofisticazione degli strumenti aumenta la precisione e la rapidità delle misure ed il numero di dati ottenibili, per cui è quasi sempre necessario che la sonda sia direttamente collegata ad un calcolatore capace di sintetizzare tutte le informazioni ricevute in una forma consona alla capacità di ricezione del ricercatore. Una catena di montaggio dell'informazione di questo tipo è ovviamente delicata e costosa, e spesso è al di fuori della portata operativa di un individuo solo. Da queste considerazioni si può capire l'importanza che ancora rivestono in oceanografia gli strumenti ed i metodi che possiamo definire tradizionali i quali, entro i loro limiti, presentano semplicità d'uso e grande affidabilità. La descrizione di alcuni di questi strumenti e del loro impiego operativo è l'oggetto di questo capitolo.

Il campionamento dei parametri oceanografici mediante gli strumenti tradizionali avviene in genere per punti nello spazio e nel tempo: il punto spaziale è fissato dalle coordinate geografiche del punto nautico in cui la nave ha fatto **stazione**, e dalla profondità alla quale si è effettuata la misura; il punto temporale è dato dall'istante in cui questa è stata effettuata. Il termine "punto" in realtà indica sempre un intorno le cui dimensioni sono di fatto o per ipotesi trascurabili rispetto alla scala spaziotemporale in cui si opera; per esempio il punto nautico può rappresentare una zona del diametro di un miglio o più se si opera in mezzo all'oceano, o del diametro di pochi metri se si opera dentro un porto. Sommando agli errori di posizionamento il fatto che non è possibile tenere una sonda fissa in mezzo al corpo d'acqua oceanico, si constata che il concetto "punto di campionamento" indica un percorso fatto dalla sonda in un tempo finito più o meno lungo, in uno strato più o meno profondo entro un'area più o meno vasta.

La nave, arrivata nel punto di stazione, ferma la macchina e va alla deriva mentre con opportuni verricelli si calano da bordo gli strumenti (bottiglie, termometri, correntometri) appesi lungo il cavo alle distanze volute.

2. Misura della profondità. La profondità del fondale è usualmente data dall'ecoscandaglio di bordo, e può essere successivamente corretta in base alla velocità del suono corrispondente al profilo verticale di salinità e temperatura misurato.
La profondità alla quale si trova effettivamente uno strumento appeso lungo il cavo zavorrato all'estremità non è direttamente misurabile; essa può essere conosciuta indirettamente attraverso misure di pressione, o può essere calcolata in base alla lunghezza del cavo filato ed alla configurazione che si suppone esso assuma in seno alla massa d'acqua.

La pressione può essere misurata direttamente od indirettamente per mezzo di una coppia di termometri a rovesciamento di cui uno con il bulbo protetto (par.4): nota p e la densità media $\bar{\rho}$ della colonna d'acqua dalla superficie z=0 alla profon-

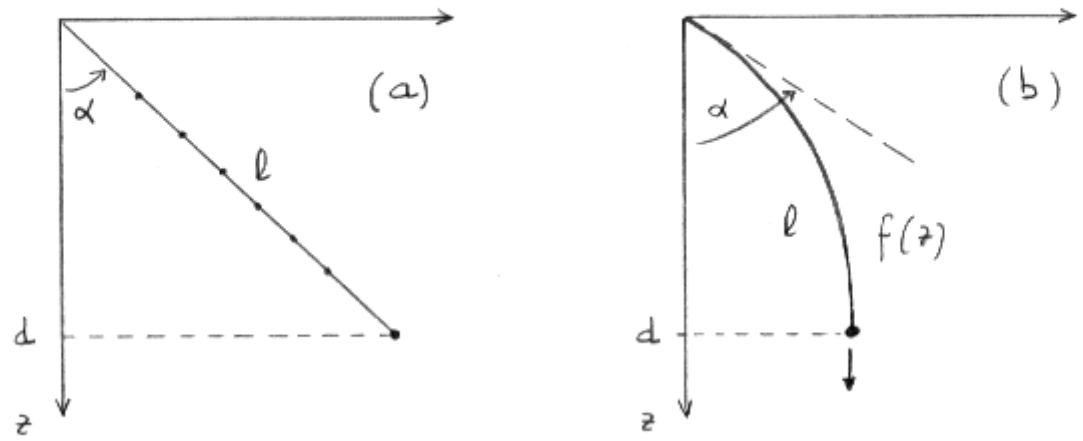


Fig. VIII.1 - Ipotesi di conformazione del cavo immerso.

dità z=d, per la legge di Stevino (II.12) si ha che

$$d = (p(d) - p(0))/\bar{\rho}\, g \quad . \tag{1}$$

Per una stima diretta della profondità si conosce in genere l'angolo α che il cavo di supporto degli strumenti forma con la verticale alla superficie del mare, e la lunghezza ℓ del cavo filato letta sulla rotella metrica. La configurazione del cavo immerso dipende dal campo di corrente relativo alla nave, dal peso e dal diametro del cavo, dal peso, dalla forma e dalla disposizione degli strumenti e della zavorra: in generale si avrà una curva sghemba variabile col tempo. Nel caso di pesi distribuiti lungo il cavo e deriva costante, si può ritenere il cavo rettilineo (fig. 1a), per cui

$$d = \ell \cos \alpha \quad . \tag{2}$$

Nel caso in cui il peso sia concentrato all'estremità si può ritenere che la pendenza del cavo decresca linearmente da α a zero alla profondità d (fig. 1b), per cui esso assume una configurazione f(z) tale che

$$\frac{df}{dz} = \mathrm{tg}\, \alpha\, (1 - z/d) \ , \tag{3}$$

$$f(z) = \mathrm{tg}\, \alpha\, (z - z^2/2d) \ , \tag{4}$$

che è un arco di parabola. La lunghezza del cavo sfilato è data da

$$\ell = \int_0^d dz \left\{ 1 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 \right\}^{1/2} ; \tag{5}$$

per $\alpha < 45°$, $df/dz < 1$, la (5) si può approssimare con

$$\ell \simeq \int_0^d dz \left\{ 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dz}\right)^2 \right\} = d\left(1 + \frac{1}{6}\, \mathrm{tg}^2 \alpha\right) . \tag{6}$$

In questo caso perciò la profondità corretta è data da:

$$d = \ell/(1 + \frac{1}{6}\, \mathrm{tg}^2 \alpha\ ) \ . \tag{7}$$

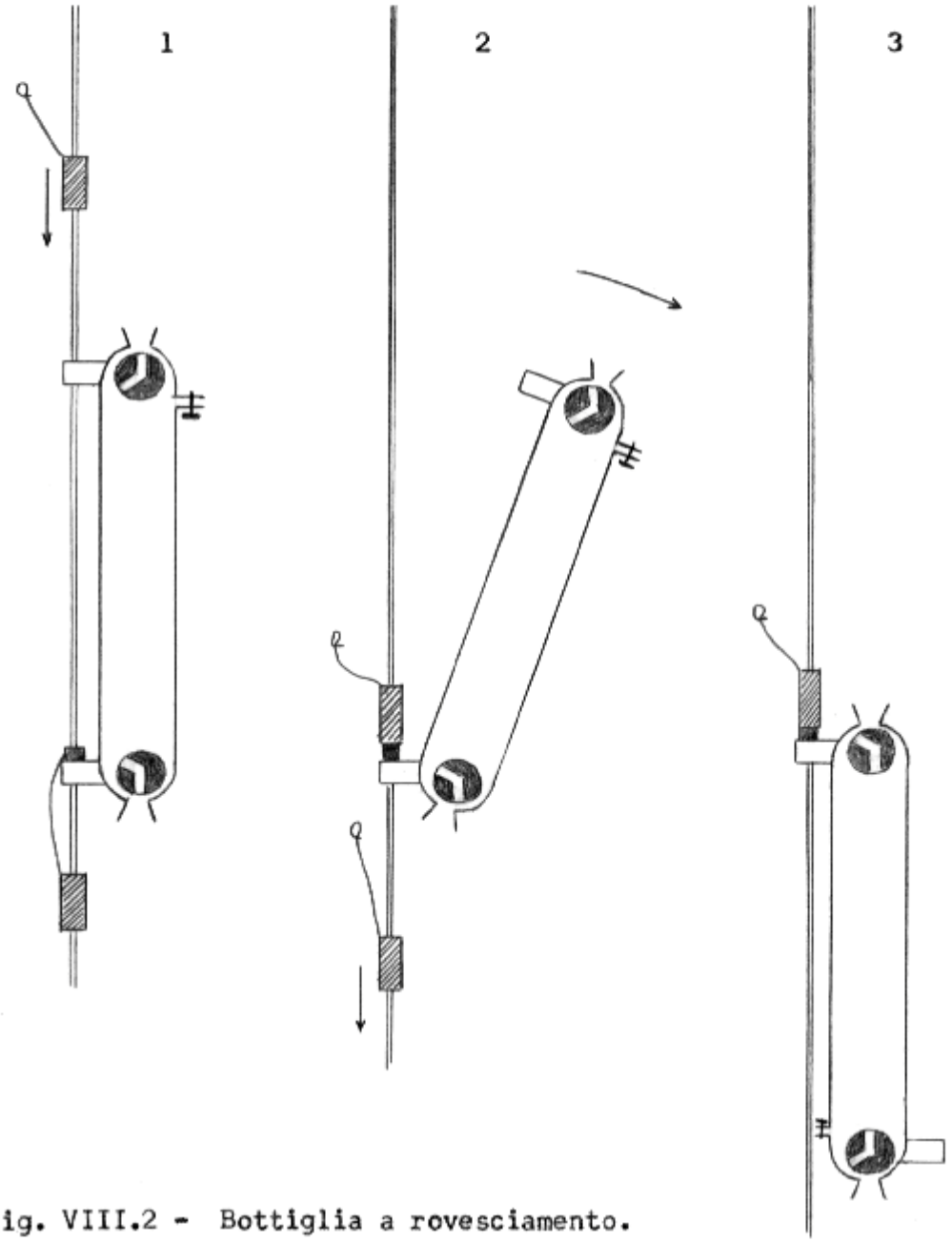


Fig. VIII.2 - Bottiglia a rovesciamento.

3. Prelievo di campioni d'acqua. Per il prelievo di campioni d'acqua di mare in profondità vengono normalmente impiegati dei contenitori metallici, di vetro o di plastica detti **bottiglie**, che vengono appesi in serie sul cavo alle distanze volute e poi calate aperte in mare. Raggiunte le profondità previste, la chiusura delle bottiglie è ottenuta con l'invio di un **messaggero**, cioè di un peso agganciato coassialmente sul cavo, il quale, picchiando sulla prima bottiglia, comanda il dispositivo di chiusura e lo sgancio di un secondo messaggero che va a compiere lo stesso lavoro sulla bottiglia successiva.

La scelta del tipo di bottiglia da impiegare dipende dal tipo di analisi che saranno effettuate sul campione prelevato: bottiglie di vetro o di plastica ad esempio evitano l'inquinamento metallico; bottiglie dello stesso modello sono inoltre disponibili con diverse capacità. Bottiglie speciali sterilizzabili ven-

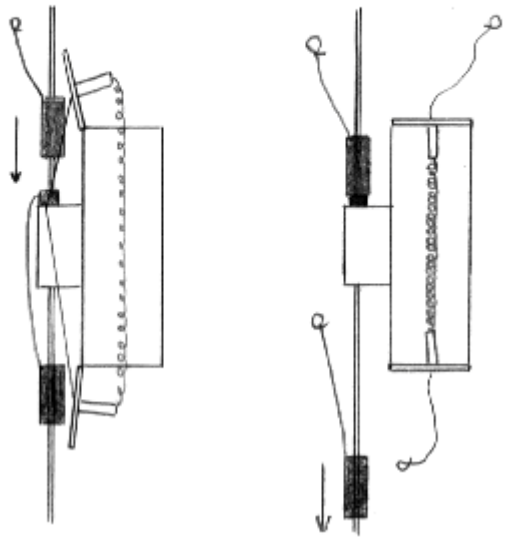


Fig. VIII.3 - Bottiglia a scatto.

gono impiegate in vista di analisi biochimiche.

Nelle bottiglie **a rovesciamento** (es. tipo Nansen) l'impatto del messaggero provoca lo sgancio dell'attacco superiore: la bottiglia fa perno attorno all'attacco inferiore e si capovolge, mentre due valvole rotanti ne chiudono le estremità (fig.2).

Nelle bottiglie **a scatto** (es. tipo Niskin) i coperchi posti alle due estremità vengono liberati dal messaggero, e si chiudono per la trazione di un elastico che passa internamente alla bottiglia (fig. 3).

4. Termometri a rovesciamento. Il principio di funzionamento del termometro è illustrato nella fig. 4. Il volume di mercurio uscito dal bulbo alla temperatura in situ T che si trova sopra la strozzatura s, staccato in questo punto in seguito al capovolgimento dello strumento, riempie il bulbo v e parte del capillare graduato. La trappola t raccoglie il mercurio eventualmente uscito dal bulbo dopo il rovesciamento per effetto di temperature maggiori a T. Alla temperatura ambiente T_a si effettua la lettura T_ℓ del termometro (corretta per l'errore di scala): T_ℓ è diversa da T per l'alterazione del volume del mercurio staccato e del vetro nel passaggio da T a T_a. Detto K il reciproco del coefficiente di espansione termica del mercurio relativo al vetro, e detto V_o il volume del bulbo v in gradi di capillare, una formula spedita per il calcolo della temperatura in situ è

$$T = T_\ell + \frac{(T_\ell + V_o)\,(T_\ell - T_a)}{K} \quad . \qquad (8)$$

Le costanti K e V_o, caratteristiche di ogni termometro, sono incise sullo strumento (in genere $K \simeq 6100$ e $V_o \simeq 100°$). Il termometro a rovesciamento è costruito in una custodia tubolare di vetro assieme ad un normale termometro, detto ausiliario, comodo per la lettura della temperatura ambiente T_a.

Il termometro a rovesciamento permette misure di temperatura al centesimo di grado; è costruito nel tipo **protetto** e **non protetto.** Il bulbo del termometro protetto (fig. 4) scambia il calore con l'ambiente attraverso un'intercapedine parzialmente riempita di mercurio che ha la funzione di assorbire la compressione idrostatica. Il bulbo del termometro non protetto è invece a diretto contatto con l'ambiente liquido, per cui la pressione idrostatica su di esso esercitata causa una ulteriore emissione di mercurio nel capillare: in seguito al rovesciamento, il termometro non protetto indica pertanto una temperatura T_p maggiore della temperatura in situ T. La casa costruttrice indica il coefficiente di pressione Q del termometro non protetto; la differenza di temperatura T_p - T è pertanto una funzione di Q, della profondità d e della densità media $\bar{\rho}$ della colonna d'acqua: da questa differenza si può pertanto stimare la profondità di rovesciamento

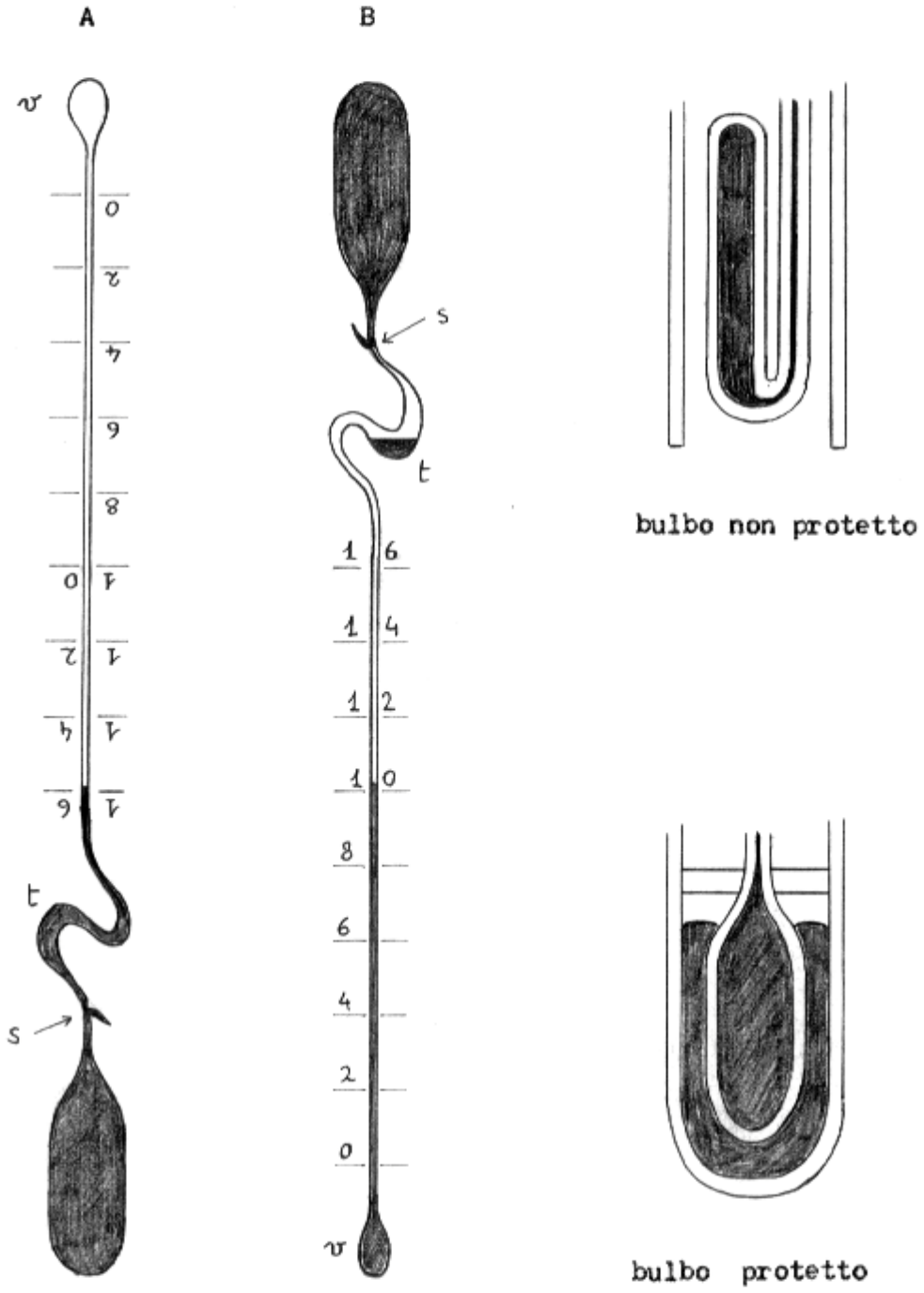


Fig. VIII.4 - Termometro a rovesciamento: (A) in fase di misura; (B) dopo il rovesciamento, in fase di lettura.

$$d = \frac{T_p - T}{\bar{\varrho}\ Q} \quad . \tag{9}$$

In genere $Q \simeq 0.1$ °C/bar, per cui per d=100 m si ha che $T_p - T \simeq 1$ °C.

I termometri a rovesciamento vengono montati su appositi supporti o, di solito, direttamente sulle bottiglie a rovesciamento o su di una custodia girevole sulle bottiglie a scatto. La loro costante di tempo è dell'ordine del minuto, per cui è richiesto un tempo di ambientamento di cinque minuti. Recuperati a bordo, è bene attendere che il termometro ausiliario sia ben stabilizzato alla temparatura ambiente prima di provvedere alle letture.

5. Determinazione della salinità. Nella routine della chimica oceanografica la salinità è calcolata con la relazione (II.3) in funzione della clorinità Cl. Quest'ultima si determina con il metodo di Mohr-Knudsen, che consiste nel titolare il campione d'acqua di mare con nitrato d'argento usando come indicatore il cromato di potassio. Quando l'argento ha spostato tutto il cloro, formando cloruro d'argento (bianco), si combina con il cromato di potassio dando cromato di argento (rosso):

$$Na\,Cl + Ag\,NO_3 = Ag\,Cl + Na\,NO_3 \quad , \tag{10}$$

$$2\,Ag\,NO_3 + K_2\,CrO_4 = Ag_2\,CrO_4 + 2\,K\,NO_3 \quad . \tag{11}$$

La soluzione usata per la titolazione è standardizzata con un campione di "acqua normale", la cui clorinità è determinata con molta precisione (al decimillesimo di $^o/_{oo}$); questi campioni, preparati presso appositi laboratori, si trovano in commercio in fiale sigillate.

La salinità è anche misurata con conduttimetri (cfr. II.2) e con apparecchi rifrattometrici (cfr. II.11).

6. Misure di corrente. Per la misura della corrente nell'oceano si possono seguire due metodi fondamentali, corrispondenti alla descrizione del moto secondo Lagrange e secondo Eulero (par. III.3,4): con il primo sistema si segue il movimento di opportuni galleggianti trascinati dalla corrente; con il secondo si misura in un punto fisso il vettore velocità dell'acqua in funzione del tempo.

Metodi lagrangiani. L'oggetto lanciato in acqua ha la funzione di tracciante: si usano coloranti per lo studio della diffusione o per mettere in evidenza un termoclino, si usano "cartoline" per studiare il trasporto delle correnti superficiali. Per poter fare misure quantitative, è necessario che l'oggetto tracciante possa stare in equilibrio in acqua a densità voluta, ovvero che sia sensibile alla corrente esistente ad una determinata profondità, e che possa essere seguito con continuità. Le **croci di corrente** (fig. 5) sono costruite in modo da presentare una buona superficie di trascinamento alla profondità desiderata, ed una minima resistenza alla corrente dello strato soprastante ed al vento: sono adatte per seguire le correnti dello strato superficiale ($\sim$ 10 m), e possono essere posizionate a vista, dalla nave o da terra, o col radar. I **paracadute**, uniti con un cavo ad un galleggiante e zavorrati, sono adatti per correnti anche profonde: sono seguiti via radio o con il radar. Il **galleggiante di Swallow** è costruito per mantenersi in equilibrio in uno strato di densità costante predeterminata, del quale segue la corrente trasmettendo segnali acustici ricevuti a bordo della nave che lo segue; può essere impiegato ad ogni profondità, e può essere munito di

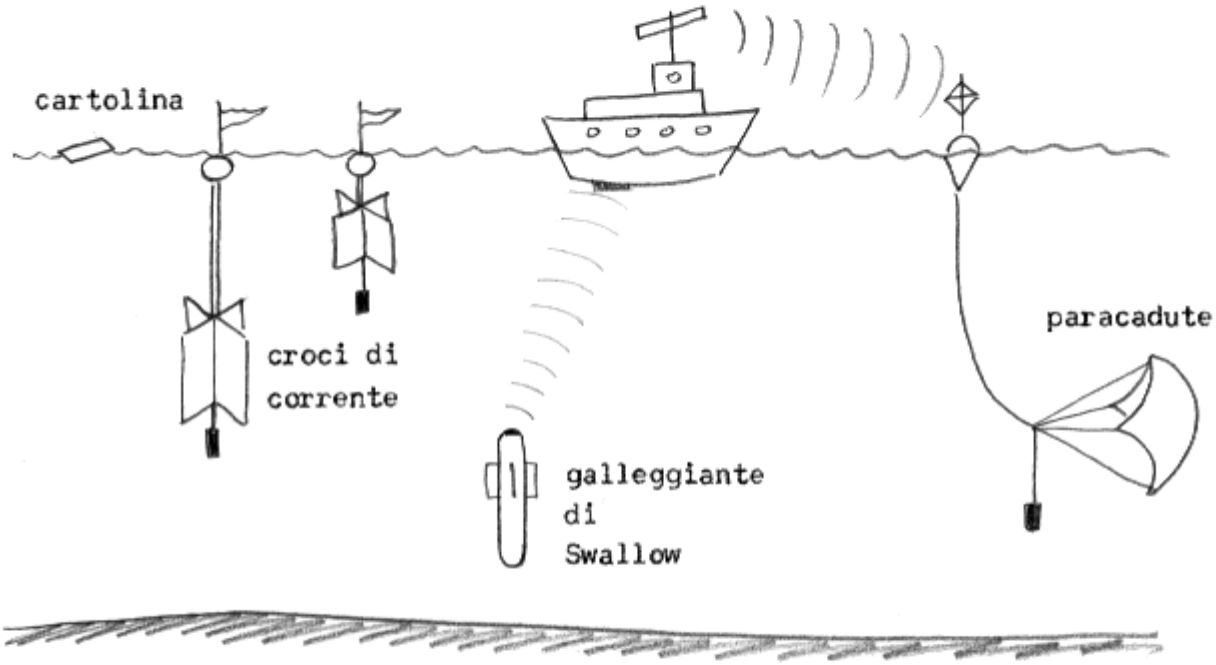


Fig. VIII.5 - Metodi per la determinazione lagrangiana della corrente.

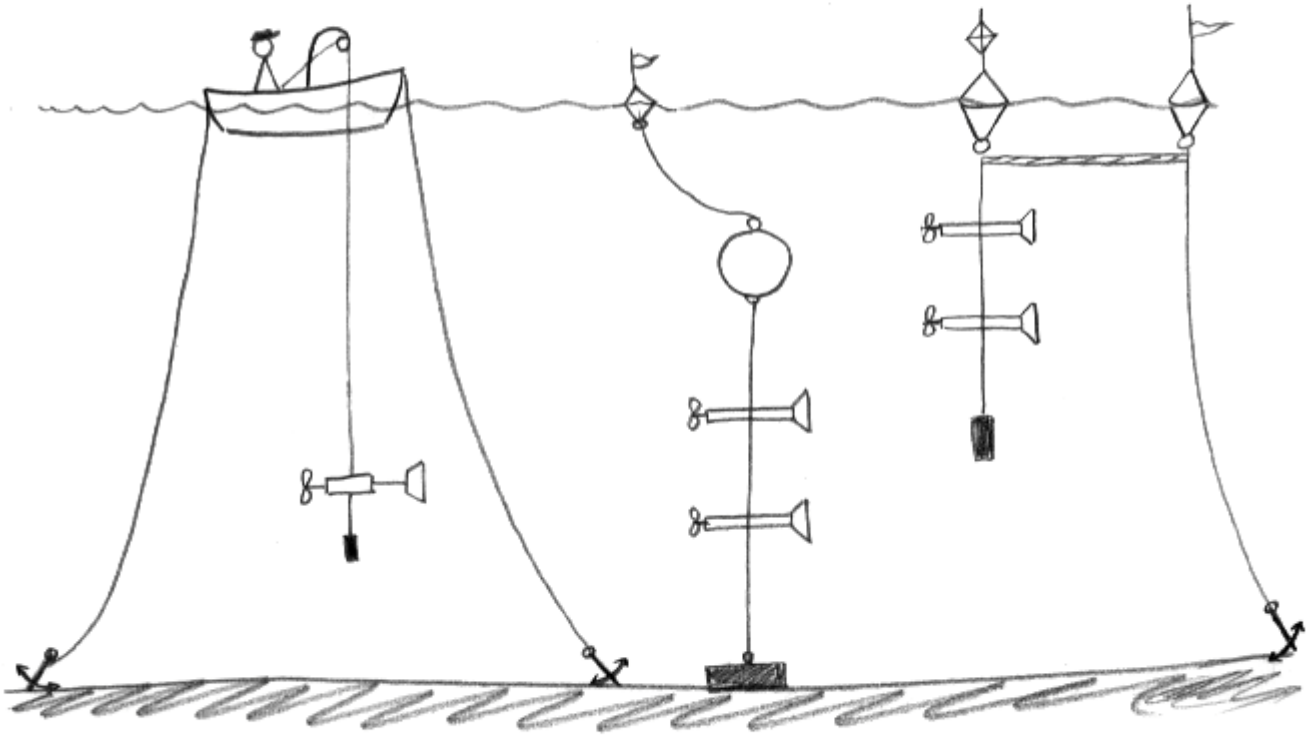


Fig. VIII.6 - Metodi euleriani per la misura della corrente.

sonde per la registrazione autonoma della pressione, della temperatura, ecc..

Metodi euleriani. L'intensità e la direzione della velocità viene misurata in un "punto fisso" mediante un correntometro, o a diverse profondità con una catena di correntometri, la cui disposizione operativa può essere di diverso tipo a seconda delle esigenze (es. fig. 6). Un correntometro è uno strumento fornito in generale di un rotore (elica a vite, elica a pale, rotore di Savonius) calibrato in modo che dal numero di giri al secondo che esso compie si risale alla velocità della corrente che lo aziona, e fornito di una coda che lo mantiene orientato, o di una banderuola orientabile.

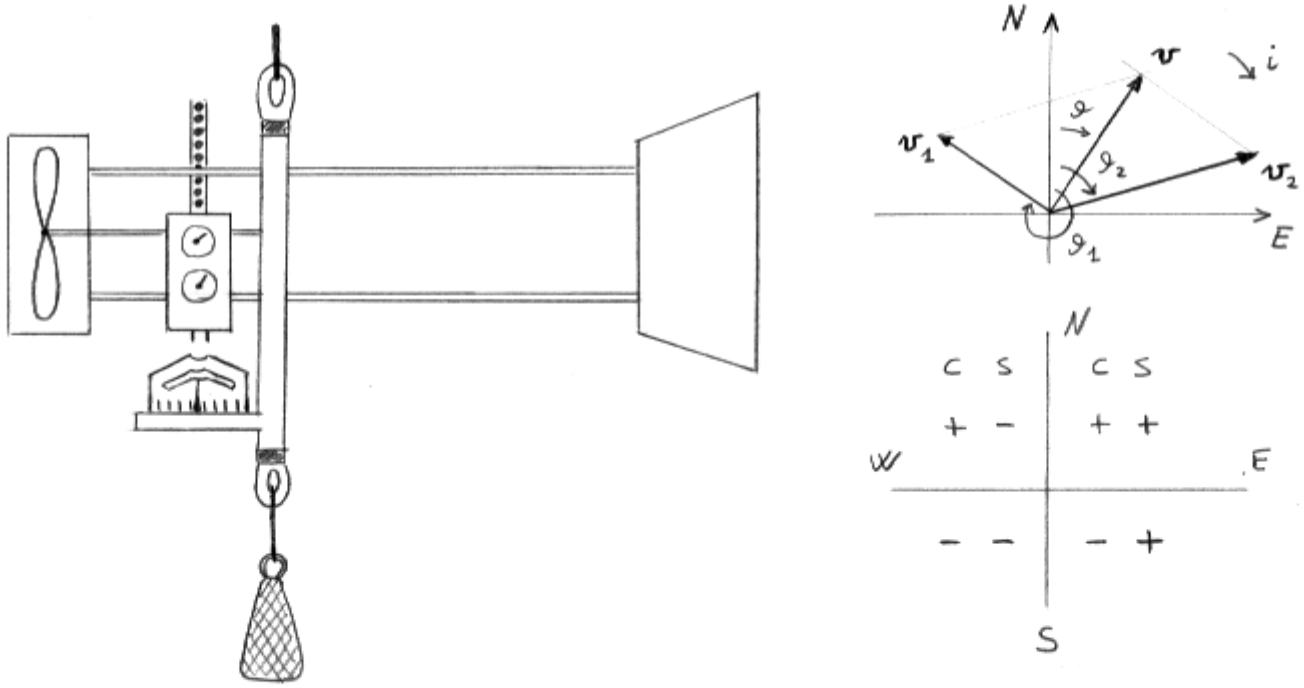


Fig. VIII.7 - Correntometro Ekman-Merz e calcolo della direzione risultante.

Il **correntometro Ekman-Merz** viene zavorrato ed appeso all'estremità del cavo; gli attacchi sono montati su cuscinetti a sfere , in modo che la coda orienta un'elica a dieci pale in faccia alla corrente. L'invio di un messaggero attiva un contagiri, che viene fermato da un secondo messaggero inviato dopo un tempo voluto. Ogni venti giri dell'elica, un pallino di bronzo fosforoso cade attraverso il contagiri da un serbatoio in una bussola sottostante, dove l'ago magnetico opportunamente scanalato ad un'estremità lo invia in uno dei 36 scomparti in cui è diviso l'angolo giro. Terminata la misura, il correntometro viene salpato a bordo, dove si procede alla lettura del contatore ed al conteggio dei pallini nella bussola. Dal numero di giri, dall'intervallo di campionamento e dalla curva di taratura del correntometro si calcola la velocità media $\bar{v}$; dal conteggio dei pallini, in totale $N = \sum n_i$, si ricava la distribuzione n_i , i=1,36, in funzione della direzione $\vartheta_i = 10\ i°$. Ai fini del trasporto nel punto di misura, la velocità $\mathbf{v}$ risultante è data dalla somma dei vettori

$$\mathbf{v}_i = \frac{n_i}{N}\,\bar{v}\,\{\cos\vartheta_i,\ \mathrm{sen}\,\vartheta_i\}\ ; \tag{12}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\bar{v}}{N}\,\{C,\ S\}\ , \tag{13}$$

$$C = \sum n_i \cos\vartheta_i\ ,\quad S = \sum n_i\,\mathrm{sen}\,\vartheta_i\ . \tag{14}$$

Il modulo della velocità risultante è dunque

$$v = \frac{\bar{v}}{N} \sqrt{C^2 + S^2} , \tag{15}$$

e la sua direzione è

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{S}{C} + k\, 180° , \tag{16}$$

ove k = 0,1,2 in funzione del segno di C ed S (fig. 7). Le componenti positive a N e ad E della velocità risultante (15,16) sono rispettivamente

$$v_N = v \cos\vartheta \quad , \quad v_E = v \operatorname{sen}\vartheta . \tag{17}$$

Si può definire un coefficiente percentuale di dispersione in base al rapporto tra i moduli della velocità risultante e della velocità media

$$\delta = 100 \left(1 - \frac{v}{\bar{v}} \right) \% = 100 \left(1 - \frac{1}{N} \sqrt{C^2 + S^2} \right) \% . \tag{18}$$

A parte la lentezza operativa, il correntometro Ekman-Merz fornisce dati di corrente precisi, e può essere calato a qualsiasi profondità essendo privo di parti a chiusura ermetica.

I correntometri moderni contengono nel loro corpo un dispositivo elettronico che registra su nastro magnetico con cadenza prefissata il numero di giri totalizzato dall'elica e l'orientazione relativa ad una bussola interna. Su questi correntometri si possono montare sensori di temperatura, pressione, conducibilità, ecc.. Il nastro viene poi decodificato, ed i dati in esso contenuti sono immessi in un calcolatore che li elabora secondo le esigenze.

IX . ELABORAZIONE DEI DATI

1. Introduzione. Una misura, od una serie di misure fisiche, producono un insieme di dati numerici; uno dei compiti del ricercatore è quello di trattare ed elaborare questi numeri in modo da ricavarne il massimo delle informazioni. Un tipo di trattamento si ottiene considerando l'insieme dei dati disponibili in blocco, senza riguardo ad un loro eventuale ordinamento spaziale o temporale; la descrizione che ne consegue è di tipo statistico, e le informazioni ricavate riguardano per esempio il valore medio, il valore o la classe di valori più probabili e così via. Un secondo tipo di trattamento dei dati si ha invece considerandoli come un insieme ordinato, in funzione dello spazio o del tempo a seconda dei casi; si tenta allora di scomporre il fenomeno dato, il cui andamento è in genere complesso, in un certo numero di componenti ad andamento più regolare, esprimibili matematicamente per mezzo di funzioni analitiche, possibilmente periodiche.

Nei prossimi paragrafi daremo una descrizione, sia pur breve e semplicistica, della elaborazione dei dati secondo questi due punti di vista.

2. Tavole di frequenza ed istogrammi. Consideriamo un insieme finito di N numeri reali $\{x_i\ ;\ i=1,N\}$, distribuiti lungo l'asse delle x in un intervallo avente per estremi il loro valore minimo x_m ed il loro valore massimo x_M. Ricoperto l'intervallo (x_m, x_M) con un numero K di intervalli o **classi** di ampiezza δ opportuna, consideriamo per ogni classe, individuata dal suo punto medio ξ_n, il numero o **frequenza** f_n degli x_i in essa compresi: abbiamo in tutto K coppie di numeri

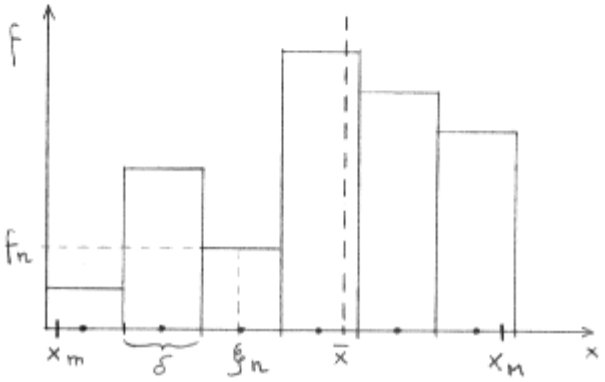


Fig. IX.1- Istogramma.

$$(\xi_n\ ,\ f_n)\ ,\quad n = 1,K \tag{1}$$

che costituiscono per gli $\{x_i\}$ una **tavola di frequenza.** La somma di tutte le frequenze è naturalmente uguale al numero totale dei dati:

$$\sum_{n=1}^{K} f_n = N\ . \tag{2}$$

Si può anche definire la **frequenza relativa** f_n/N, o la **frequenza percentuale**

$$\varphi_n = 100\ f_n / N\ \%\ . \tag{3}$$

La rappresentazione grafica della tavola di frequenza (1), ottenuta affiancando sull'asse x dei rettangoli di base δ e altezza f_n, prende il nome di **istogramma.** Analogamente a quanto definito per le tavole di frequenza, possiamo considerare in alternativa **istogrammi relativi** o **istogrammi percentuali.** Nelle tavole di frequenza si riconoscono a vista i **modi,** ovvero le classi ξ_n aventi una frequenza massima relativa; nell'istogramma, un modo è rappresentato da un rettangolo più alto di quelli che lo affiancano. La definizione ha senso quando

lo spicco è rilevante: si parla allora di distribuzione unimodale, bimodale, ecc.. Se i numeri $\{x_i\}$ esprimono, in una certa unità di misura, dati fisici sperimentali, il concetto di frequenza relativa, subordinatamente alla ripetibilità della misura, può essere inteso in termini di probabilità: un modo rappresenta un insieme di valori che hanno una probabilità di verificarsi maggiore di altri.

Si usano anche definire la tavola di frequenza, e di conseguenza l'istogramma, **cumulativi:**

$$\left(\xi_n \, , \; c_n = \sum_{l=1}^{n} f_l \right) \quad , \; n = 1, K \, , \tag{4}$$

dove in ogni classe la frequenza c_n è uguale alla somma delle frequenze f_n delle classi precedenti, classe ξ_n compresa; si ha che $c_K = N$. Le fig. I.3,4 sono un esempio di istogramma e relativo istogramma cumulativo.

La distribuzione dei dati in base al loro valore numerico così visualizzata può essere ulteriormente caratterizzata con l'impiego di alcuni parametri statistici che ora definiamo. Il procedimento di costruzione della tavola di frequenza in pratica ha sostituito ai dati originali $\{x_i \; ; \; i=1,N\}$ dei dati rappresentativi $\{\xi_n \; ; \; n=1,K\}$, attribuendo ad ogni ξ_n un peso uguale a f_n. Diciamo allora **valor medio** la media pesata

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{K} f_n \xi_n \; ; \tag{5}$$

le caratteristiche della distribuzione dei dati attorno al loro valor medio $\bar{x}$ si descrivono in funzione degli **scostamenti** o **residui** o **deviazioni**

$$d_n = \xi_n - \bar{x} \; , \tag{6}$$

la cui media pesata con le corrispondenti frequenze è nulla. Si definisce la **deviazione media**

$$\bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{K} f_n |d_n| \, , \tag{7}$$

uguale alla media pesata dei valori assoluti delle deviazioni. Si usano inoltre considerare i cosiddetti **momenti** della distribuzione degli $\{\xi_n\}$: il momento di ordine n è la media pesata delle n-me potenze degli scostamenti (6). Il primo momento è nullo, per la definizione di scostamento; il secondo momento definisce la **varianza o dispersione**

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{K} f_n d_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{K} f_n \xi_n^2 - \bar{x}^2 \, . \tag{8}$$

La seconda espressione di σ^2 nella (8) è una conseguenza delle (6,5); la radice positiva della varianza è il parametro statistico σ noto con il nome di **deviazione standard.** La deviazione standard, ovvero la radice della media quadratica pesata degli scostamenti, è come la varianza e la deviazione media un indice della dispersione della distribuzione degli ξ_n dal loro valore medio $\bar{x}$. I momenti di ordine 3 e 4 vengono in genere normalizzati dividendoli per σ^3 e σ^4 : si hanno così i coefficienti adimensionali:

$$\sigma_3 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{K} f_n d_n^3 \, / \sigma^3 \, , \tag{9}$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{K} f_n d_n^4 \, / \sigma^4 \, . \tag{10}$$

In questi due coefficienti gli scostamenti, elevati rispettivamente alla terza ed alla quarta potenza, vengono esaltati; σ_3 è positivo o negativo a seconda che prevalgano gli φ_n maggiori o minori del valore medio: esso è detto quindi **coefficiente di simmetria (skewness)**. Il coefficiente σ_4, detto di **appiattimento (kurtosis)**, è sempre positivo: esso è al pari di d, σ^2, σ un indice di dispersione.

Le definizioni dalla (5) alla (10) si possono naturalmente applicare direttamente ai dati $\{x_i\}$, ponendo $\varphi = x$ e $f = 1$; avremo così rispettivamente:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \quad , \tag{11}$$

$$d_i = x_i - \bar{x} \quad , \tag{12}$$

$$\bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |d_i| , \tag{13}$$

$$\sigma = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} d_i^2 \right\}^{1/2} , \tag{14}$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} d_i^3 / \sigma^3 , \tag{15}$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} d_i^4 / \sigma^4 . \tag{16}$$

3. Distribuzione normale. Risulta in genere utile confrontare la distribuzione dei dati, caratterizzata dal suo istogramma, con delle distribuzioni teoriche, descritte da funzioni analitiche, le cui caratteristiche sono note. Ci limitiamo qui a considerare la distribuzione **normale o gaussiana**, in cui la frequenza in funzione della x è data con continuità dalla funzione esponenziale

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \, e^{-h^2 (x - \bar{x})^2} \quad . \tag{17}$$

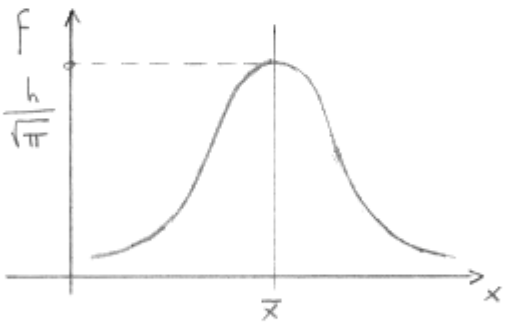


Fig.IX.2-Distribuzione normale.

La curva normale è rappresentata in fig. 2 : essa è simmetrica rispetto al valore medio x , e decresce esponenzialmente sui due lati con il quadrato dello scostamento $x - \bar{x}$. Il parametro positivo h è detto **modulo di precisione**; per $x = \bar{x}$, $f(\bar{x}) = h/\sqrt{\pi}$: aumentando h la curva si alza e si restringe attorno al valore medio e viceversa, diminuendolo, la distribuzione normale si appiattisce ed aumenta la sua dispersione. La curva gaussiana rappresenta il limite teorico della distribuzione di infinite misure di una grandezza che ammette un unico valore vero, di cui $\bar{x}$ è la misura più probabile.

I parametri statistici calcolati per la distribuzione normale (17) sono:

$$\bar{d} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \quad , \tag{18}$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}\, h} \quad , \tag{19}$$

$$\sigma_3 = 0 \quad , \tag{20}$$

$$\sigma_4 = 3 \quad . \tag{21}$$

Usando la relazione (19) si può descrivere la gaussiana in funzione della deviazione standard σ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2} \quad ; \qquad (22)$$

la curva si appiattisce col crescere di σ e viceversa. Il coefficiente di simmetria (20) è nullo, poichè la curva è simmetrica. Una distribuzione reale approssima tanto meglio una distribuzione normale quanto più i suoi parametri (13,15,16) sono vicini a (18,20,21), e quanto più il rapporto $\sigma / \bar{d}$ è prossimo al rapporto tra (19) e (18), che è $\sqrt{\pi/2} = 1.2533$. Con riferimento alla fig. 2, una distribuzione asimmetrica con $\sigma_3 > 0$, indice di ampi scostamenti positivi, presenta una "coda" a destra, e viceversa per $\sigma_3 < 0$.

Si calcola inoltre che l'area percentuale tra la curva e l'asse delle x, per diversi intervalli simmetrici rispetto al valore medio, è per la (22):

$$\bar{x} \pm \sigma \; : \; 68\,\% \; ,$$

$$\bar{x} \pm 2\sigma \; : \; 96\,\% \; ,$$

$$\bar{x} \pm 3\sigma \; : \; 100\,\% \; ;$$

l'area esterna all'intervallo $\bar{x} \pm 3\sigma$ è appena lo 0.3 % dell'area totale, che è uguale a 1. Le percentuali di cui sopra, riferite ad una distribuzione reale di misure ripetute, possono essere tradotte in termini di probabilità : $\bar{x} \pm \sigma$ rappresenta il valore vero della grandezza fisica misurata con il 68 % di probabilità, ecc. .

4. Fenomeni stocastici e deterministici. L'insieme di dati che ora consideriamo è da intendersi ordinato rispetto ad una variabile indipendente, che d'ora in poi, tanto per fissare le idee, sarà il tempo t. Questo insieme può essere continuo, cioè descritto da una funzione $x(t)$ in un certo intervallo temporale, oppure discreto, cioè descritto da una serie temporale $x_n = x(n\,\Delta t)$. I dati rilevati con continuità possono provenire da uno strumento registratore di tipo analogico, dove la striscia di carta registrata rappresenta il grafico di $x(t)$; la serie temporale può essere direttamente misurata ad intervalli fissi, oppure può essere campionata dalla registrazione continua. Useremo la descrizione continua e quella discreta del fenomeno in alternativa, essendo sempre possibile tradurre la prima nella seconda, e la seconda nella prima con un passaggio al limite.

I fenomeni fisici si possono in generale classificare come **stocastici** (o **probabilistici**) oppure **deterministici.** Quelli che rientrano nella prima categoria possono essere studiati solamente in termini statistici (facendo per esempio uso dei concetti descritti nel par. 2), in quanto presentano variazioni casuali, del tutto irregolari. I fenomeni deterministici viceversa possono essere descritti con funzioni analitiche; in particolare essi si dicono **periodici** o **quasi periodici** se originati da una sovrapposizione di fenomeni periodici con periodi tra loro commensurabili (es. le serie di Fourier) o, rispettivamente, incommensurabili (ad es. la marea astronomica), **transienti** o **non periodici** in tutti gli altri casi.

Nei paragrafi seguenti sono presi in considerazione i fenomeni deterministici.

5. Analisi di Fourier. Un fenomeno deterministico, rappresentato dalla funzione $x(t)$, può essere descritto in un intervallo $(-T/2, T/2)$ di lunghezza T mediante la **serie di Fourier:**

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos \frac{2\pi}{T} kt + b_k \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} kt \right\} = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt - \varphi_k\right) ; \tag{23}$$

la serie (23) è una funzione periodica, espressa come somma di un valore medio $a_0/2$, di una armonica fondamentale di periodo T e di infinite armoniche superiori di periodo T/k. Se $x(t)$ è periodica di periodo T, allora essa coincide con la serie di Fourier su tutto l'asse temporale. I coefficienti si calcolano con le formule:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi}{T} kt \, dt \quad , \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} kt \, dt \quad ; \tag{24}$$

le ampiezze e le fasi sono date da

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad , \quad \varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k} \quad . \tag{25}$$

La (23), la (24) e la (25) sono espressioni equivalenti del fenomeno $x(t)$; le funzioni a_k, b_k, A_k, φ_k del periodo T/k si dicono rispettivamente **spettro di coseni, spettro di seni, spettro d'ampiezza, spettro di fase.** Uno spettro dà dunque un'ampiezza o una fase in funzione della frequenza k/T o del periodo; nel caso (24,25), ove la frequenza e il periodo hanno valori discreti, si ha uno **spettro di righe.**

Se la funzione $x(t) = -x(-t)$ è dispari, i coefficienti a_k sono nulli; viceversa, se $x(t) = x(-t)$ è pari, sono nulli i b_k, ed $x(t)$ è rappresentata dall'unico spettro dei coseni, coincidente con lo spettro d'ampiezza:

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi}{T} kt \, dt \, . \tag{26}$$

Per esempio, una funzione della velocità angolare $\phi(\omega)$ definita nell'intervallo $(0, \Omega)$ si può pensare estesa alle $\omega < 0$ in una funzione pari; essa è allora rappresentabile con la serie di coseni

$$\phi(\omega) = \frac{b_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cos \frac{\pi}{\Omega} i\omega \quad , \tag{27}$$

dove, per la (26),

$$b_i = \frac{2}{\Omega} \int_0^{\Omega} \phi(\omega) \cos \frac{\pi}{\Omega} i\omega \, d\omega \, . \tag{28}$$

Un fenomeno quasi periodico, cioè del tipo

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N} A_k \cos(\omega_k t - \varphi_k) \quad , \tag{29}$$

dove $\omega_k = 2\pi f_k = 2\pi/T_k$ sono velocità angolari arbitrarie, è individuato biunivocamente dalla coppia degli spettri d'ampiezza e di fase $A_k = A(T_k)$, $\varphi_k = \varphi(T_k)$ (fig. 3). Le righe spettrali non sono più equispaziate sull'asse delle ω come nel caso delle serie di Fourier.

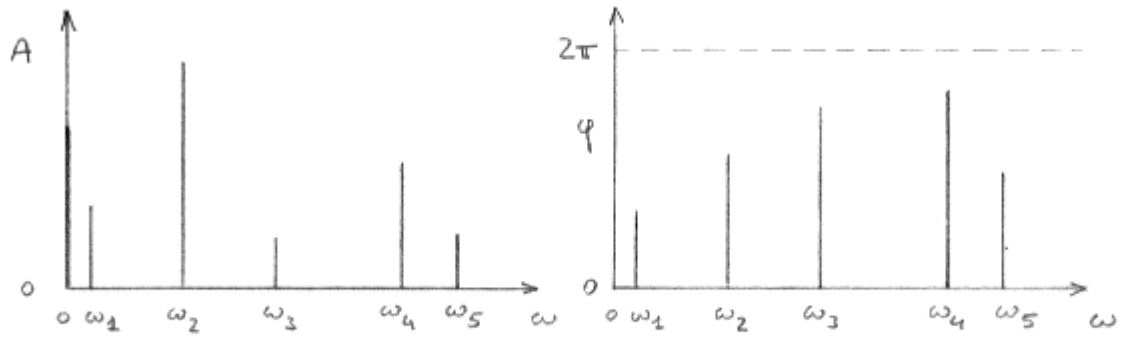


Fig. IX.3- Spettro d'ampiezza e spettro di fase di un fenomeno quasi periodico.

Un fenomeno deterministico non periodico è in generale rappresentabile con degli spettri non più di righe ma continui.

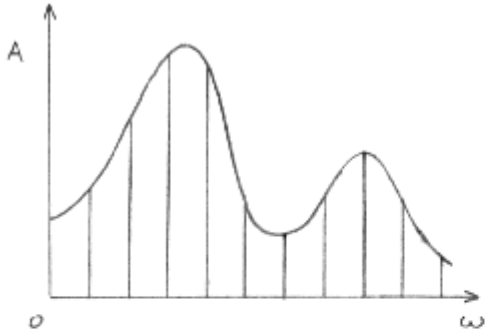


Fig. IX.4- Approssimazione di uno spettro continuo con lo spettro di Fourier.

In generale, un fenomeno fisico x(t) è composto da una parte deterministica e da una parte stocastica. Lo spettro continuo che rappresenta la parte deterministica si può ottenere, in prima approssimazione, calcolando lo spettro di Fourier (24) relativo ad un intervallo temporale opportunamente scelto, e interpolando gli estremi delle righe spettrali con una curva continua (fig. 4). Usualmente lo spettro di Fourier è calcolato per via numerica, lavorando su dati discreti, cioè non sulla funzione continua x(t) ma sulla serie temporale x_n .

6. Filtri numerici. Il concetto di **filtro** indica un mezzo atto a selezionare una parte dello spettro caratteristico di un dato fenomeno fisico. Il filtro si dice **numerico** se consiste in un procedimento di calcolo che, operando su di una serie temporale di dati, produce una serie filtrata nella quale, delle frequenze originali, sono presenti solamente quelle comprese in un dato intervallo. L'immagine di un filtro siffatto in funzione della frequenza ω e la sua azione su di uno spettro di ampiezza $A(\omega)$ è illustrata nella fig. 5; il filtro è detto **passa banda** (BP: by pass), **passa alta** (HP: high pass) o **passa bassa** (LP: low pass) a seconda che gli estremi della banda di frequenza trasmessa siano rispettivamente $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 < \infty$, $\omega_2 = \infty$, $\omega_1 = 0$.

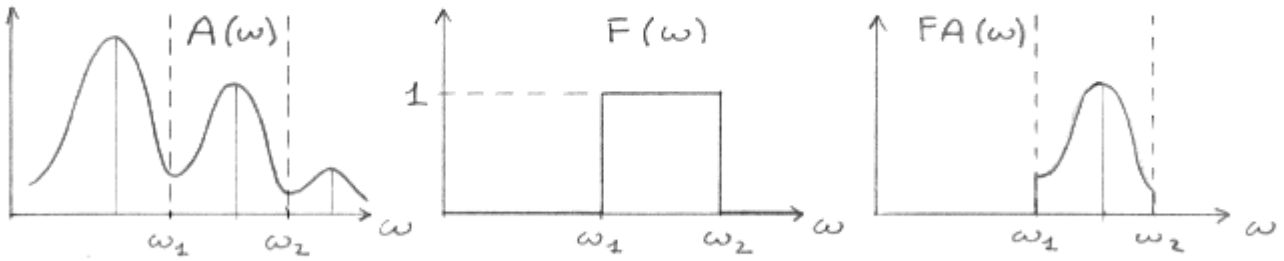


Fig. IX.5 - Filtraggio di uno spettro di ampiezza $A(\omega)$.

Il filtro ideale, rappresentato nella fig. 5 con una funzione "a gradino", non può essere praticamente realizzato, ma soltanto approssimato; in questo bisogna tener presente che un aumento della selettività va a scapito della semplicità di calcolo, e comunque non può superare certi limiti posti dal fatto che la serie dei dati da filtrare è finita. Nella parte restante di questo paragrafo è brevemente esposta la teoria di un filtro numerico molto usato per la buona selettività e la semplicità di applicazione.

Il **filtro numerico di Vercelli** consiste in una combinazione lineare simmetrica di 2M + 1 valori mediante la quale la serie temporale data

$$\{x_n \; ; \; n = 1, N\} \tag{30}$$

è trasformata nella serie filtrata

$$\{\xi_n \; ; \; n = 1+M, N-M\} \quad , \tag{31}$$

$$\xi_n = 2a_0 x_n + a_1\{x_{n-1} + x_{n+1}\} \dots + a_M\{x_{n-M} + x_{n+M}\} = \tag{32}$$

$$= \sum_{i=0}^{M} a_i \{x_{n-i} + x_{n+i}\} =$$

$$= \sum_{i=-M}^{M} b_i x_{n+i} \quad , \quad b_0 = 2a_0 \; , \; b_{-i} = b_i = a_i \; . \tag{33}$$

Una volta stabilita l'operazione di filtraggio (33), il filtro stesso è biunivocamente individuato dagli M+1 coefficienti $\{b\} = \{b_0, b_1, \dots b_M\}$; il problema da risolvere a questo punto è: (a) dati i coefficienti $\{b\}$, calcolare in funzione della frequenza la curva selettiva ovvero il filtro $F(b,\omega)$ ed, inversamente, (b) prefissato un filtro $F(\omega)$, calcolare i coefficienti $\{b\}$ che lo realizzano.

(a) **Calcolo del filtro.** Consideriamo un fenomeno deterministico quasi periodico rappresentato dalla serie temporale (29), ovvero da:

$$x_n \equiv x(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{K} A_k \cos \alpha_{nk} \; , \quad n = 1, N, \tag{34}$$

$$\alpha_{nk} = n\Delta t\,\omega_k - \varphi_k \; ,$$

$$\omega_k = 2\pi f_k = 2\pi / T_k \; ,$$

$$\omega_0 = 0, \quad T_0 = \infty, \quad \alpha_{n0} = \varphi_0 = 0 \; .$$

Il fenomeno (34) consiste nella sovrapposizione di una costante A_0 e di K componenti armoniche di ampiezza A_k, periodo T_k e fase φ_k. La funzione della frequenza A_k descrive lo spettro d'ampiezza, che è uno spettro discreto, a righe; le frequenze f_k sono in generale incommensurabili. Dal momento che

$$\cos \alpha_{n+i,k} = \cos(\alpha_{nk} + i\Delta t\,\omega_k) =$$

$$= \cos\alpha_{nk} \cos i\Delta t\,\omega_k - \operatorname{sen}\alpha_{nk} \operatorname{sen} i\Delta t\,\omega_k \; , \tag{35}$$

l'operazione di filtraggio (33) sulla serie (34) produce:

$$\xi_n = \sum_{i=-M}^{M} b_i \sum_{k=0}^{K} A_k \cos \alpha_{n+i,k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{K} A_k \left\{ \cos\alpha_{nk} \sum_{i=-M}^{M} b_i \cos i\Delta t\,\omega_k - \operatorname{sen}\alpha_{nk} \sum_{i=-M}^{M} b_i \operatorname{sen} i\Delta t\,\omega_k \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{K} \left\{ \sum_{i=-M}^{M} b_i \cos i\Delta t\, \omega_k \right\} A_k \cos \alpha_{nk} \,, \tag{36}$$

essendo la seconda somma su i in parentesi nulla perchè il seno è una funzione dispari ed i coefficienti b una funzione pari della i. La (36) mostra che la serie filtrata ξ ha le stesse componenti della serie di partenza x, con le ampiezze moltiplicate per il fattore F_k :

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{K} F_k A_k \cos \alpha_{nk} \,, \tag{37}$$

$$F_k = \sum_{i=-M}^{M} b_i \cos i\Delta t\, \omega_k = 2 \left\{ \frac{b_0}{2} + \sum_{i=1}^{M} b_i \cos i\Delta t\, \omega_k \right\} . \tag{38}$$

La funzione $F_k = F(b, \omega_k)$ è la funzione filtro, mentre $F_k A_k$ è lo spettro di ampiezza della serie filtrata ξ . La (38) permette di calcolare il filtro $F(b,\omega)$ in funzione dei coefficienti della combinazione lineare.

(b) **Calcolo dei coefficienti.** Prefissata la funzione filtro ovvero i valori F_k , k=1, K, la (38) fornisce un sistema lineare di K equazioni nelle M+1 incognite b_i , i=0, M, facilmente risolvibile. Una via più comoda per raggiungere lo stesso risultato si trova considerando il limite della (38)

$$F(b, \omega_k) \xrightarrow[M \to +\infty]{} 2\,\phi(\omega_k) \tag{39}$$

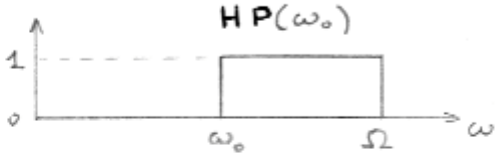
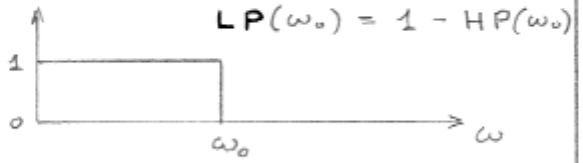
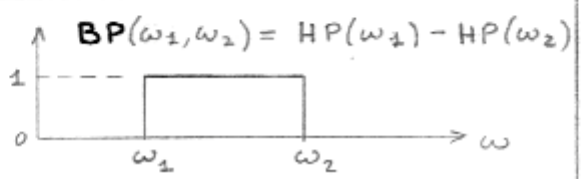
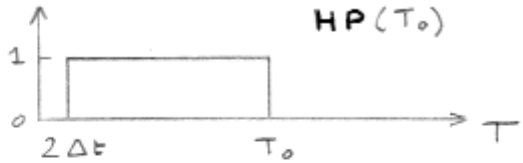
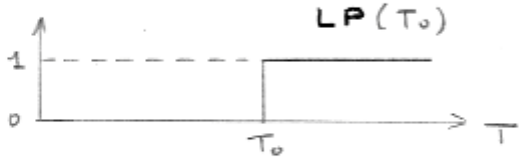
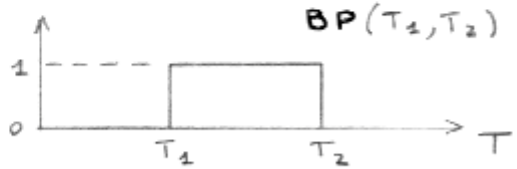
dove $\phi(\omega_k)$ è il valore che alle prefissate frequenze ω_k prende la funzione (27), posto che sia

$$\Omega = \pi / \Delta t \;; \tag{40}$$

in questo caso limite, gli infiniti coefficienti b_i sono dati dall'integrale (28). Si opera quindi come segue: prefissato un filtro ideale $2\phi(\omega)$ si calcola con la (28) un numero finito di coefficienti b_i ,i=0, M: il filtro reale $F(b,\omega)$ (38) che così si ottiene approssima $2\phi(\omega)$ tanto meglio quanto più grande è M.

Dalla teoria del filtro di Vercelli emergono due considerazioni. La prima è che esiste (40) un limite superiore $\Omega = \pi/\Delta t$ per la frequenza, ovvero un limite inferiore $\tau = 2\Delta t$ per il periodo: ciò significa che, in una serie temporale, il minimo periodo risolubile è uguale al doppio dell'intervallo di campionamento. La massima frequenza risolubile è detta anche frequenza di Nyquist: $f_N = 1/2\Delta t$. Per esempio, volendo evidenziare in un fenomeno naturale un periodo di un'ora, bisogna campionarlo al minimo ogni 30 minuti, meglio ogni 10.

La seconda considerazione riguarda il già citato rapporto tra selettività del filtro e praticità di calcolo. Si è detto che, tanto maggiore è il numero dei coefficienti b impiegato, tanto meglio un prefissato filtro ideale è approssimato, e quindi tanto migliore è la sua selettività (cfr. fig. 6); contemporaneamente però, oltre ad aumentare la lunghezza dei calcoli (33), il che può essere irrilevante per un calcolatore elettronico, si "erode" la serie di dati disponibili. Infatti, partendo da N dati (30), il filtro F(b,M) ne produce N-2M (31): ciò pone un limite ad M, che non può superare, diciamo, N/4.

$F(b,\omega) = b_0 + 2\sum_{i=1}^{M} b_i \cos i\,\Delta t\,\omega$	b_0	b_i
	$1 - \frac{\omega_0}{\Omega}$	$-\frac{1}{i\pi}\,\text{sen}\, i\pi\frac{\omega_0}{\Omega}$
	$\frac{\omega_0}{\Omega}$	$\frac{1}{i\pi}\,\text{sen}\, i\pi\frac{\omega_0}{\Omega}$
	$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\Omega}$	$\frac{1}{i\pi}\left\{\text{sen}\, i\pi\frac{\omega_2}{\Omega} - \text{sen}\, i\pi\frac{\omega_1}{\Omega}\right\}$
$F(b,T) = b_0 + 2\sum_{i=1}^{M} b_i \cos i\,\frac{2\pi\Delta t}{T}$	b_0	b_i
	$1 - \frac{2\,\Delta t}{T_0}$	$-\frac{1}{i\pi}\,\text{sen}\, i\,\frac{2\pi\Delta t}{T_0}$
	$\frac{2\,\Delta t}{T_0}$	$\frac{1}{i\pi}\,\text{sen}\, i\,\frac{2\pi\Delta t}{T_0}$
	$2\,\Delta t\left\{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right\}$	$\frac{1}{i\pi}\left\{\text{sen}\, i\,\frac{2\pi\Delta t}{T_1} - \text{sen}\, i\,\frac{2\pi\Delta t}{T_2}\right\}$

(IX.6)

Tab. IX.1 - Coefficienti del filtro di Vercelli in funzione delle frequenze e dei periodi di taglio.

i \ T_o	6 Δt	9 Δt	10 Δt	14 Δt	17 Δt	30 Δt
0	0.33333	0.22222	0.20000	0.14286	0.11765	0.06667
1	0.27566	0.20460	0.18709	0.13810	0.11498	0.06618
2	0.13783	0.15673	0.15136	0.12443	0.10722	0.06473
3	0	0.09188	0.10091	0.10344	0.09497	0.06236
4	-0.06891	0.02721	0.04677	0.07758	0.07923	0.05913
5	-0.05513	-0.02177	0	0.04977	0.06123	0.05513
6	0	-0.04594	-0.03118	0.02301	0.04233	0.05045
7	0.03938	-0.04478	-0.04324	0	0.02393	0.04522
8	0.03445	-0.02557	-0.03784	-0.01726	0.00731	0.03957
9	0	0	-0.02078	-0.02765	-0.00649	0.03363
10	-0.02756	0.02046	0	-0.03103	-0.01675	0.02756
11	-0.02506	0.02849	0.01700	-0.02821	-0.02309	0.02150
12	0	0.02297	0.02522	-0.02073	-0.02551	0.01559
13	0.02120	0.00837	0.02328	-0.01062	-0.02438	0.00995
14	0.01969	-0.00777	0.01336	0	-0.02035	0.00472
15	0	-0.01837	0	0.00920	-0.01429	0
16	-0.01722	-0.01959	-0.01169	0.01555	-0.00718	-0.00413
17	-0.01621	-0.01203	-0.01780	0.01825	0	-0.00761
18	0	0	-0.01681	0.01724	0.00638	-0.01039
19	0.01450	0.01076	-0.00984	0.01309	0.01128	-0.01245
20	0.01378	0.01567	0	0.00690	0.01424	-0.01378
21	0	0.01312	0.00890	0	0.01509	-0.01441
22	-0.01253	0.00494	0.01376	-0.00627	0.01391	-0.01438
23	-0.01198	-0.00473	0.01316	-0.01082	0.01104	-0.01376
24	0	-0.01148	0.00779	-0.01293	0.00698	-0.01261

Tab. IX.2 - Coefficienti di Vercelli $\{b_i;\ i = 0,24\}$ calcolati per filtri passa bassa a diversi periodi di taglio T_o.

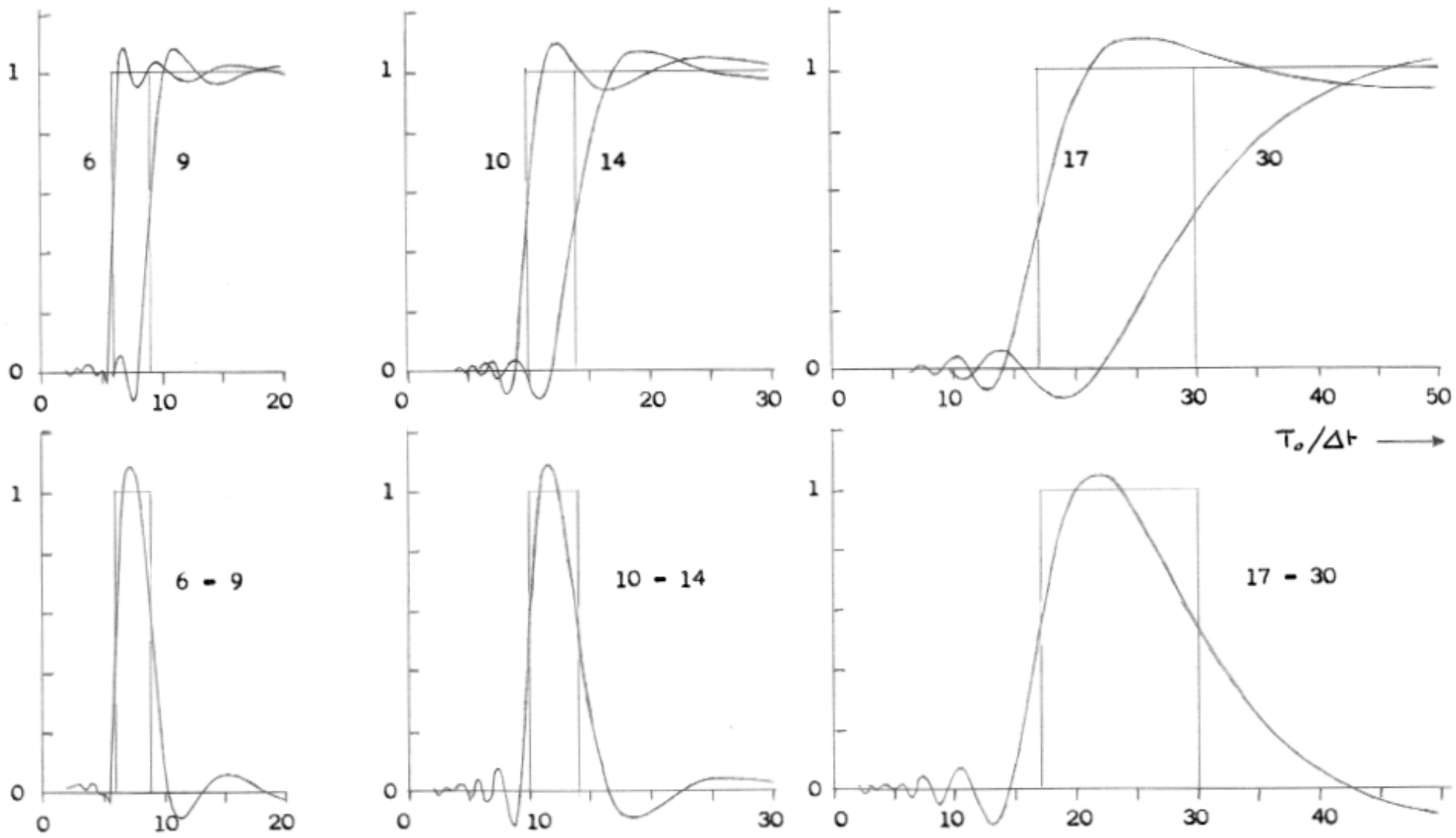


Fig. IX.6 - Filtri di Vercelli a 24 coefficienti (tab. IX.2): filtri passa bassa per diversi periodi di taglio $T_o/\Delta t$, e filtri passa banda per differenza.

(IX.6)

Per fare un esempio, calcoliamo i coefficienti del filtro ideale passa banda

$$\phi(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 , \\ 0 & \omega < \omega_1 , \ \omega_2 < \omega < \Omega \end{cases} \tag{41}$$

il fattore $\frac{1}{2}$ trae origine dalla (39). Con la (28), si calcola che

$$b_0 = \frac{2}{\Omega} \int_0^{\Omega} \phi(\omega)\, d\omega = \frac{2}{\Omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{2}\, d\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Omega} , \tag{42}$$

$$b_i = \frac{1}{\Omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \frac{\pi}{\Omega} i\omega \, d\omega = \frac{1}{i\pi} \int_{i\frac{\pi}{\Omega}\omega_1}^{i\frac{\pi}{\Omega}\omega_2} \cos x \, dx =$$

$$= \frac{1}{i\pi} \left\{ \operatorname{sen} i\pi \frac{\omega_2}{\Omega} - \operatorname{sen} i\pi \frac{\omega_1}{\Omega} \right\} . \tag{43}$$

Detta ω_0 la frequenza di taglio, il filtro passa alta si ottiene ponendo nelle (42,43) $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = \Omega$, il filtro passa bassa ponendo $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \omega_0$. I coefficienti di Vercelli per i diversi filtri sono riassunti nella tab. 1 in funzione sia delle frequenze che dei periodi di taglio.

La tab. 2 elenca, a titolo d'esempio, i coefficienti di Vercelli $\{b_i, i=0,24\}$ calcolati con la formula riportata nella tab. 1 per i filtri passa bassa $LP(T_0)$, relativi ai periodi di taglio $T_0/\Delta t$ = 6, 9, 10, 14, 17, 30. I filtri corrispondenti $F(b,T/\Delta t)$, calcolati con la (38) ove si è posto $\Delta t \omega = 2\pi/(T/\Delta t)$, sono rappresentati nella fig. 6: si noti che i filtri passa bassa sono circa uguali a 0.5 in corrispondenza dei periodi di taglio; i filtri passa banda selezionano i periodi attorno a 7, 12, 22 Δt rispettivamente. I grafici degli stessi filtri, messi in funzione della frequenza, sarebbero simmetrici rispetto alle frequenze di taglio.

7. Analisi periodale. Si indica con questo nome un procedimento numerico atto a mettere in evidenza le componenti periodiche di un dato fenomeno. Il primo passo consiste nel conoscere, o nel riconoscere a vista, o nel calcolare le componenti spettrali del fenomeno; il secondo passo è quello di separare ciascuna componente con un opportuno filtro numerico.

La fig. 7 è un esempio di analisi periodale effettuata su di una serie di dati orari del livello del mare registrati al mareografo di Trieste. In questo caso sono conosciuti i periodi principali: quelli della marea astronomica, prossimi a 12 ed a 24 ore, e quelli delle sesse fondamentali dell'Adriatico, rispettivamente di 21.5, 11, 7 ore. I filtri usati sono quelli della fig. 6; siccome la loro selettività non è tale da permettere la separazione delle sesse dalla marea astronomica, quest'ultima che è perfettamente nota viene preventivamente calcolata e sottratta dai livelli osservati. Rimane la componente meteorologica del livello marino, la cosiddetta "storm surge" (cap. V): l'andamento del livello medio è evidenziato col filtro passa bassa LP (30^h), che taglia via i periodi inferiori a 22 ore; i filtri passa banda BP(17^h-30^h), BP(10^h-14^h), BP(6^h-9^h) evidenziano le tre sesse fondamentali. La storm surge è così risolta nelle sue componenti principali: un innalzamento del livello marino in equilibrio con il campo di venti sciroccali, oscillazioni libere conseguenti all'impatto del vento ed al suo brusco cessare. Alla componente meteorologica si somma la marea luni-solare del momento, con un effetto complessivo maggiormente dannoso quando esiste tra queste concordanza di fase.

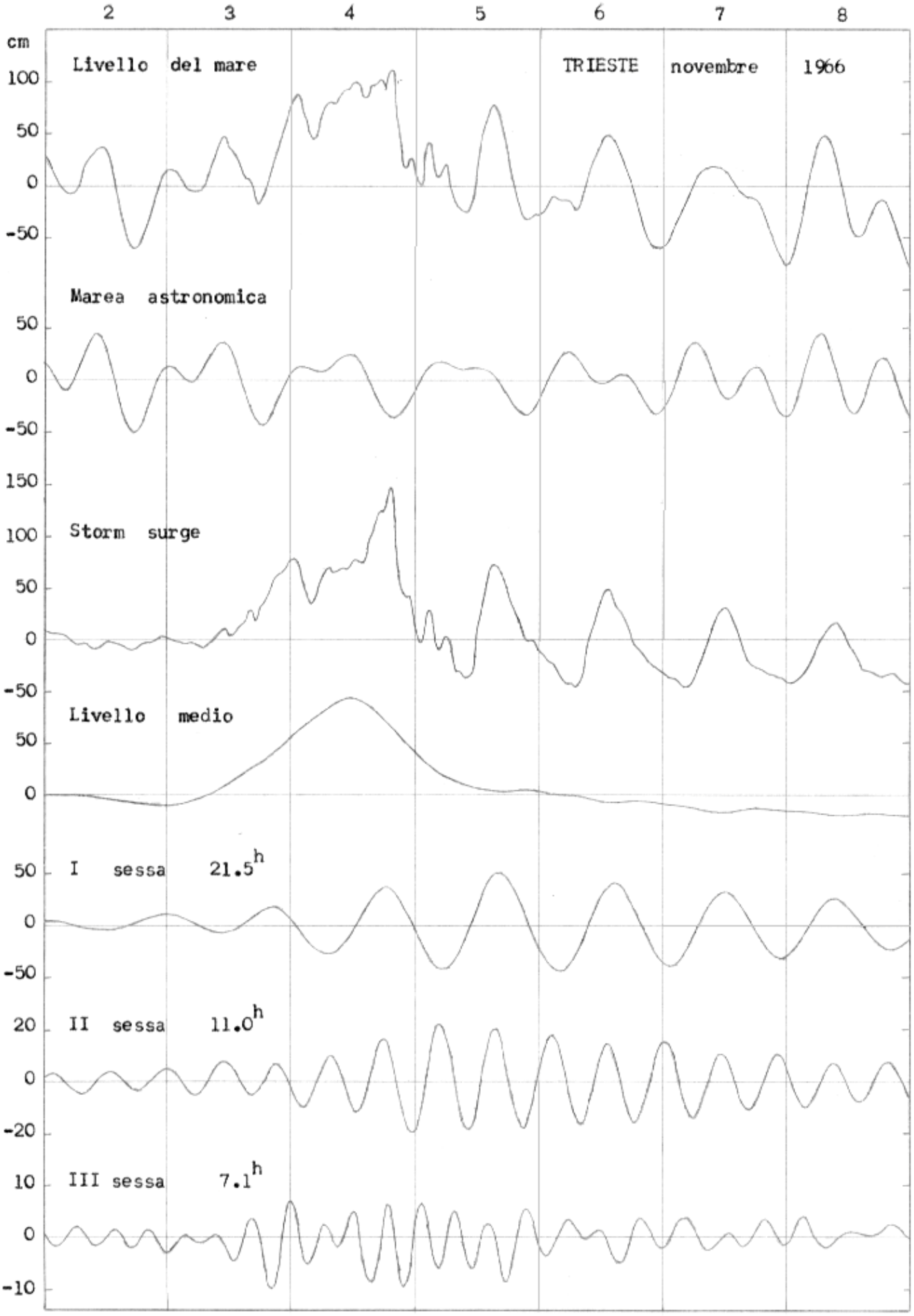


Fig. IX.7 - Livello del mare (cm) a Trieste (mareografo dell'Istituto Talassografico), 2 - 8 novembre 1966: livello osservato, marea astronomica calcolata, marea meteorologica ("storm surge") per differenza. Componenti filtrate della marea meteorologica: livello medio e sesse principali dell'Adriatico.

B I B L I O G R A F I A

- Von ARX W.: "An introduction to physical oceanography", Addison-Wesley 1962.
- BULJAN M., ZORE-ARMANDA M.: "Oceanographycal properties of the Adriatic sea", in Ocean. Mar. Biol. Ann. Rev., Vol. 14, 11-98, 1976.
- DEFANT A.: "Physical oceanography", 2 vol., Pergamon Press 1961.
- MOSETTI F.: "Oceanografia", Del Bianco 1964.
- NEUMANN G., PIERSON W.: "Principles of physical oceanography", Prentice-Hall 1966.
- SVERDRUP H.U., JOHNSON M.W., FLEMING R.H.: "The oceans - their physics, chemistry and general biology", Prentice-Hall 1959.
- VERCELLI F.: "Il mare, i laghi, i ghiacciai", UTET 1951.